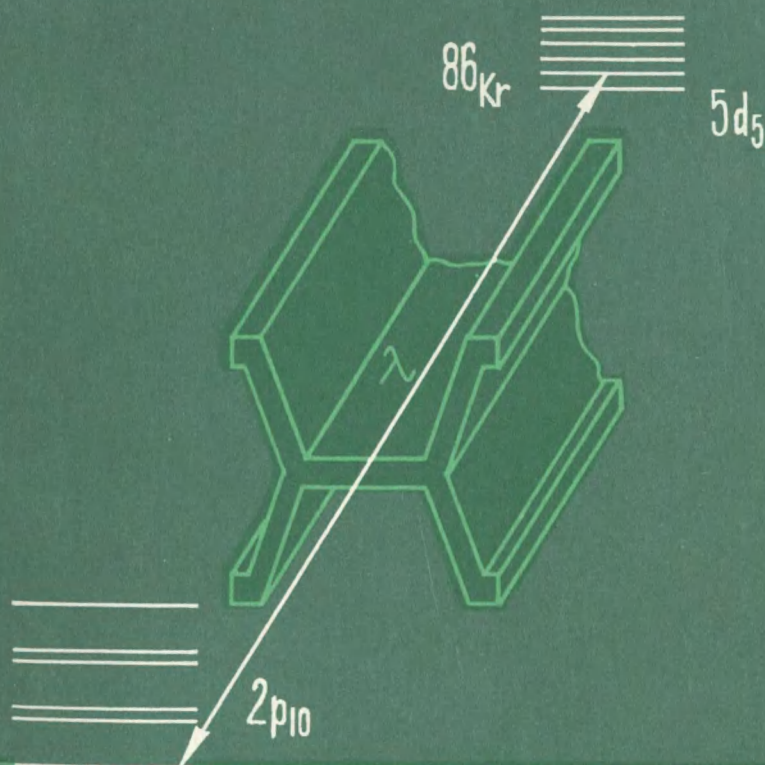


Д.КАМКЕ, К.КРЕМЕР

# ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ





---

PHYSIKALISCHE  
GRUNDLAGEN  
DER MASSEINHEITEN

Mit einem Anhang über Fehlerrechnung

Von Dr. phil. Detlef Kamke  
o. Professor an der Universität Bochum

und Dr. rer. nat. Klaus Krämer  
Akad. Rat an der Universität Bochum

1977  
B. G. Teubner Stuttgart

Д. КАМКЕ, К. КРЕМЕР

---

# ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ

Перевод с немецкого

*В. Е. Маркевича*

и д-ра физ.-мат. наук, проф.

*Н. В. Мицкевича*

под редакцией

д-ра физ.-мат. наук, проф.

*А. Н. Матвеева*

Издательство «Мир»  
Москва 1980



Scan AAW

Рассмотрены физические основы определения единиц измерения и обсуждена реализация базисных единиц системы СИ. Анализируются физические предпосылки выбора единиц измерения и экспериментальная техника современной метрологии. Излагается история установления единиц измерения. Теория обработки результатов измерений дается в кратком изложении, отвечающем требованиям курса общей физики вузов. Книга рассчитана на широкий круг физиков, преподавателей физических и технических дисциплин в вузах, техникумах и средних школах, студентов вузов как пособие по курсу общей физики.

*Редакция литературы по физике*

1704010000

К  $\frac{20401-074}{041(01)-80}$  74—80

© B. G. Teubner, Stuttgart 1977 Allein autorisierte russische Übersetzung der deutschen Originalausgabe

© Перевод на русский язык, «Мир», 1980

Д. Камке, К. Кремер

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЕДИНИЦ ИЗМЕРЕНИЯ**

Научн. редактор В. Самсонова

Мл. научн. редакторы Г. Сорокина, Р. Зацепина

Художник В. Суриков

Художественный редактор Л. Безрученко

Технический редактор Е. Ящук

Корректор В. Постнова

ИБ № 2269

Сдано в набор 28.05.80. Подписано к печати 08.09.80. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 3. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 6,50 бум. л. Усл. печ. л. 13. Уч.-изд. л. 10,81. Изд. № 2/0765. Тираж 59000. экз. Заказ № 1675. Цена 80 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Ордена Октябрьской Революции

и ордена Трудового Красного Знамени

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова

Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

Москва, М-54, Валовая, 28

## Предисловие редактора перевода

В настоящее время существует довольно много книг, посвященных единицам измерения и написанных главным образом в связи с переходом к Международной системе единиц (СИ). Переход осуществляется в законодательном порядке большинством стран в соответствии с рекомендациями XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960). В этих книгах в основном описываются различные системы единиц, обсуждается связь их с системой СИ и приводятся соответствующие таблицы.

Авторы предлагаемой вниманию читателя книги, проф. Д. Камке и д-р К. Кремер из университета г. Бохум (ФРГ), поставили перед собой совсем другую задачу — обсудить проблему реализации базисных единиц системы СИ. Эта проблема в современной метрологии решается путем использования самых последних достижений науки и техники, что нашло полное отражение в книге. При изложении материала авторы опирались на собственный педагогический опыт. Обсуждая со студентами вновь принятые единицы измерения, они стремились сделать занятия как можно более интересными. И это им, судя по книге, блестяще удалось.

Для хорошего понимания излагаемого материала необходимо достаточно глубокое знание многих разделов физики. Например, реализация масштаба длины требует использования интерферометрических измерений, создание температурной шкалы основывается на ряде опорных точек, обусловленных теми или иными физическими явлениями, и т. д. Поэтому содержащийся в книге материал нельзя рассматривать как введение в курс физики, изучаемый в вузе. Он является составной частью курса общей физики и должен излагаться в соответствующих разделах по ходу изучения предмета. В этом отношении книга окажет существенную помощь преподавателям высших учебных заведений.

Общие вопросы теории единиц измерения достаточно хорошо изучены. Тем не менее до сих пор даже среди специалистов возникают иногда дискуссии, например, о том, правомерно ли использовать систему СИ в электродинамике, причем речь идет именно о правомерности, а не о целесообразности или нецелесообразности. Поэтому содержащееся в книге краткое изложение относящихся сюда вопросов является полезным как для выяснения самих вопросов, так и в отношении методики их постановки. Оно, вероятно, поможет избежать хотя бы некоторых бесплодных дискуссий.

Обработке результатов измерений следует уделять при обучении студентов больше внимания, чем это обычно делается. Хотя издано достаточно много руководств, единого общепринятого для курса общей физики стандарта пока нет. Содержащийся в приложении материал следует рассматривать как важный вклад в выработку такого стандарта.

Мы надеемся, что книга будет полезна не только студентам, но и всем тем, чей интерес выходит за рамки простого определения тех или иных физических величин.

*А. Матвеев*

## Предисловие

Предлагаемая вниманию читателей книга возникла на базе физического семинара, который мы вели для кандидатов в учителя второй ступени Рурского университета в Бохуме. Если сначала обсуждение вновь принятых официальных единиц казалось скучным занятием, то позднее, особенно когда мы занялись анализом физических основ измерения, у всех пробудился интерес к этой теме. Для такого анализа потребовалось ознакомиться со многими литературными источниками. В результате возникло желание не предавать забвению изученные материалы и поделиться данными об основаниях для выбора наших единиц измерения со всеми, кто их изучает (да и не только с ними). Мы надеемся, что достигли теперь своей цели.

Что касается предмета нашего изложения, то следует еще лишь заметить, что единицы измерения не являются застывшей системой — всякий новый успех в развитии техники измерений, равно как и открытие новых явлений (вспомним хотя бы об эффекте Джозефсона) могут вести к переопределению основных единиц. Данные о ходе такого развития можно почерпнуть в журнале *Metrologia*.

Нам хотелось бы поблагодарить здесь г-жу Дорис Рунцер и г-жу Дагмар Хаке за аккуратное выполнение схем и фоторепродукций. С особенной благодарностью мы отметим работу г-жи Ингелоры Мильдт, старательно и квалифицированно подготовившей рукопись этой книги. Мы благодарны дипломированному физику С. Хауну за составление предметного указателя.  
Бохум, август 1976 г.

*Д. Камке  
К. Кремер*

# I Введение

Многие стороны обыденной жизни, техники и естествознания определяются количественными данными, характеризующими процессы, предметы и их состояния. Для получения таких данных потребовалось развитие методов измерения и систем единиц. Все большая сложная взаимосвязь в системе хозяйствования потребовала введения единой системы единиц измерения. Эти соображения лежат в основе того, что время от времени в законодательном порядке вводятся новые определения единиц для поддающихся измерению величин и случается, что иногда происходит даже отмена привычных старых единиц (например, замена лошадиной силы (л. с.) на киловатт (кВт) для двигателей автомашин). Как правило, новые определения единиц вводятся после того, как в естественных науках будет указан способ достижения повышенной точности определения единиц и калибровки с их помощью масштабов, часов и пр.— всего того, что находит затем применение в каждодневной жизни. Во все времена наблюдалось стремление к установлению единиц, обязательных для граждан страны. На рис. 1 изображено определение или даже реализация «всеобщей меры». В подписи к нему можно усмотреть стремление к точности, выразившееся в статистическом усреднении по размерам 16 ног. «Средняя» нога («фут») — это тогда  $\frac{1}{16}$  данной меры.

Прошло уже более 200 лет с тех пор, как удалось точно сформулировать понятие измеримой (физической) величины. Введение новых единиц измерения всегда производится в соответствии с таким пониманием измеримой величины. Еще *Леонард Эйлер* (математик и физик) дал приемлемое и для наших дней определение физической величины. В своей «Алгебре» [1] он в самом начале писал (ч. I, разд. 1, гл. 1):

Рис. 1. Средневековое определение единиц длины (из «Геометрии» Якоба Кёбеля, Франкфурт, 1575 г.).

«Шестнадцать человек — маленьких и больших, так, как они примерно выходят один за другим из церкви, — должны встать своими башмаками друг за другом. Такая длина является и должна быть по праву всеобщей мерой».





«1. Прежде всего называется *величиной* все то, что способно увеличиваться или уменьшаться, или то, к чему можно нечто прибавить или от чего можно нечто отнять.

Таким образом, сумма денег является величиной, потому что допускает добавление к себе или отнятие от себя.

Также и вес является величиной по тем же причинам.

2. Существует очень много разного рода величин, которые не поддаются счету, и от них происходят различные разделы физики <sup>1)</sup>, каждый из которых имеет дело со своим особым родом величин. Физика <sup>1)</sup> вообще есть не что иное, как наука о величинах, занимающаяся нахождением средств, как измерять последнее.

3. Однако невозможно определить или измерить одну величину иначе, как приняв в качестве известной другую величину этого же рода и указав отношение, в котором она находится к ней.

Так что если эта величина должна определять сумму денег, то принимается в качестве известного некоторое количество денег, например гульден, рубль, талер или дукат и т. д., и указывается, сколько раз такое количество содержится в данной сумме денег.

Аналогично, если эта величина должна определять вес, то принимается в качестве известного некоторый вес, например фунт, центнер или лот и т. д., и указывается, сколько раз он содержится в данном весе.

Если же требуется измерить какую-нибудь длину или ширину, то при этом пользуются одной определенной известной длиной, именуемой футом.

4. При определении или измерении величин всякого рода мы приходим, следовательно, к тому, что прежде всего устанавливается некоторая известная величина этого же рода, именуемая мерой или единицей и зависящая исключительно от нашего произвола. Затем определяется, в каком отношении находится данная величина к этой мере, что всегда выражается через числа, так что число является не чем иным, как отношением, в котором одна величина находится к другой, принятой за единицу».

К данным *Эйлером* определениям физической величины, единицы и численного значения нам и сегодня нечего добавить, кроме того, что нам теперь известно намного больше физических величин, чем во времена *Эйлера*. В частности, были введены величины теории электричества, магнетизма, атомной и ядерной физики. Таким образом, мы можем привести намного большее число определений величин и соответствующих конкретных единиц, причем это множество постоянно растет ввиду роста наших

---

<sup>1)</sup> *Эйлер* говорит здесь о математике, но по смыслу она заменена на физику.

потребностей. Бывает так, что в отношении поддающейся измерению величины сначала несколько изменяют постановку вопроса. Например, нельзя сказать: это «голубое» а то «наполовину голубое», ибо невозможно указать единицу, с которой можно было бы сравнивать оба оттенка цвета. Однако вместо этого можно задать вопрос о спектральной плотности излучения в диапазоне длин волн  $\lambda$  от 400 до 500 нм ( $1 \text{ нанометр} = 10^{-7} \text{ см} = 10^{-9} \text{ м}$ ) и обнаружить, что новая постановка вопроса допускает введение определения (которое, конечно, соответствует не понятию «наполовину голубое», а понятию «в два раза меньшей интенсивности»). Величины и единицы меняются с течением времени и в понятийном аспекте. Примером может служить радиоактивность вещества. Введенная первоначально единица 1 кюри, позднее также связанная с именем лорда Резерфорда и являющаяся до сих пор единицей радиоактивности, обозначается как 1 Ки и выражает количество вещества, в котором распадается  $3,7 \cdot 10^{10}$  атомных ядер в одну секунду. Таким образом, ее можно свести к количеству вещества, измеряемому в граммах. Теперь же в единицах СИ — это  $1 \text{ с}^{-1}$ .

Бывает и так, что хотя физический эффект поддается определению и для него можно установить единицу, однако количественная характеристика воздействия оказывается очень затруднительной. Например, если быстрая частица (скажем, альфа-частица, возникающая при радиоактивном распаде вещества) отдает всю свою кинетическую энергию при торможении в живой ткани, то этот процесс можно описать, используя понятие дозы облучения, т. е. потери энергии на единицу массы. Однако до сих пор учет биологического воздействия такой частицы является предметом исследований.

Эмоциональные понятия до настоящего времени не поддаются количественному учету, не удастся определить соответствующих им единиц. Больной не может количественно выразить степень своего недомогания. Однако большую помощь врачу при установлении диагноза могут оказать измерения температуры и частоты пульса, а также лабораторные анализы, характеризующиеся количественными данными (скорость осаждения эритроцитов, содержание сахара в моче и т. п.).

## 2      Физическая величина, ее числовое значение и размерность, уравнения для физических величин

### 2.1.      Величина и ее числовое значение

Мы даем названия *характеристикам объектов и явлений* одушевленной и неодушевленной природы, чтобы проводить различия между этими характеристиками. Так возникают понятия, формулировки которых являются ответами на вопросы типа: «Что понимают под тем-то или тем-то?» По ходу истории количество понятий постоянно увеличивалось и продолжает увеличиваться теперь. В некоторых случаях *понятию* удастся сопоставить *физическую величину*. При этом соответствующая характеристика должна быть такой, чтобы можно было определить для нее единицу и производить измерения. Тогда для этих *величин* формулируются *законы природы* в форме математических уравнений, что делает возможным проведение расчетов по общим правилам математики.

Мы говорим, что *величина*  $G$  измерена, если известно, сколько раз в  $G$  содержится некоторая единица. Это и есть *числовое значение*  $\{G\}$  величины  $G$ . Если символически обозначить через  $[G]$  *единицу величины*  $G$  (единица времени 1 секунда, единица силы тока 1 ампер), то при этом

$$\{G\} = \frac{G}{[G]}. \quad (1)$$

Числовое значение является просто числом без добавления какой-либо иной информации. Соотношение (1) можно задать также в виде

$$G = \{G\}[G]. \quad (2)$$

Указание значения величины  $G$  (ее измеренного значения) влечет за собой поэтому и необходимость указания соответствующей единицы. Так, если сила электрического тока  $I$  в проводнике оказывается в 10 раз больше, чем единица — 1 ампер (1 А), значит, сила тока равна  $I=10$  А (подчеркнем, что это *не* 10 [А], но всегда 10 [I]=10 А).

Приводящие к неудобству слишком высокие или низкие порядки численных значений (по отношению к 10) сокращенно выражаются с помощью введения новых разрядов единиц, называемых через старые с добавлением приставки (так получаются но-

вые единицы, например  $1 \text{ мм}^3 = 1 \cdot (10^{-3} \text{ м})^3 = 10^{-9} \text{ м}^3$ ). Сама физическая величина при этом не изменяется, так как

$$G = \{G\} [G] = \{FG\} \left[ \frac{G}{F} \right] = \{G'\} [G']. \quad (3)$$

Если единицу уменьшить в  $F$  раз, то числовое значение увеличится также в  $F$  раз. Такая *инвариантность физической величины* имеет место не только при изменении единицы в десять в некоторой степени раз, но и при прочих изменениях этой единицы, например при замене метров дюймами. Так, если давление указывалось равным  $100 \text{ psi}$  ( $\text{psi}$  = фунт на квадратный дюйм), то

$$\begin{aligned} 100 \text{ psi} &= 100 \frac{\text{фунт}}{(\text{дюйм})^2} = 100 \frac{0,4536 \text{ кг} \cdot 9,80665 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}}{(2,54)^2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = \\ &= 6,895 \cdot 10^5 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 6,895 \text{ бар}. \end{aligned}$$

В табл. 1 дана сводка официально принятых сокращений названий единиц. Существенно, чтобы не использовались удвоенные

Таблица 1

Официально утвержденные приставки десятичного деления единиц

Приставка	Обозначение		Логарифм степени десяти
	латинское	русское	
Тера	<i>T</i>	Т	12
Гига	<i>G</i>	Г	9
Мега	<i>M</i>	М	6
кило	<i>k</i>	к	3
гекто	<i>h</i>	г	2
дека	<i>da</i>	да	1
деци	<i>d</i>	д	—1
санти	<i>c</i>	с	—2
милли	<i>m</i>	м	—3
микро	$\mu$	мк	—6
нано	<i>n</i>	н	—9
пико	<i>p</i>	п	—12
фемто	<i>f</i>	ф	—15
атто	<i>a</i>	а	—18

или многократные приставки (например, не мкмкФ, а пФ). Следует также обращать внимание на то, чтобы не возникла опасность принять приставку милли (м) за метр (м). Например,  $1 \text{ мК} = 1 \text{ милликельвин}$ , но  $1 \text{ Км} = 1 \text{ кельвин-метр}$ ; также лучше пи-

сать 1 мДж (1 миллиджоуль) вместр 1 ммН=1 миллиметр-ньютон=1 мНм=1 миллиньютон-метр. Кроме того,  $1 \text{ мА}^2=(10^{-3} \text{ А})^2=10^{-6} \text{ А}^2$  и  $1 \text{ см}^2=(10^{-2} \text{ м})^2=10^{-4} \text{ м}^2$ .

## 2.2. Род величины и ее размерность

Размерность некоторой величины, как и сама величина, не зависит от выбора единицы измерения. Расстояние между двумя точками, длина каната, толщина доски, радиус окружности, длина окружности, высота башни, длина дуги геометрической кривой в плоскости или в пространстве — все это принадлежит к *одному и тому же роду величин*, а именно к *величинам типа длины*. При этом говорят, что размерность этих величин есть длина:

$$\dim G = \text{длина}. \quad (4)$$

Что же касается выбора единицы для  $G$ , то существует много возможностей: 1 м, 1 дюйм ( $=2,5400 \text{ см}$ ), 1 световой год ( $=9,46 \cdot 10^{14} \text{ м}$ ) и т. д.

С помощью квадрата на плоскости, каждая сторона которого имеет длину 1 м, определяется единица площади 1 м<sup>2</sup>. Поверхности каменной плиты, шара, площадь круга, поверхность паруса яхты, площадь пашни (в Германии измерявшаяся в моргенах) — все это *величины типа площади*. Из принципа их построения (площадь равна произведению двух сторон) следует, что

$$\dim (\text{площадь}) = (\text{длина})^2. \quad (5)$$

(Всякая площадь «двумерна».) Куб, ребра которого имеют длину по 1 м, служит для определения единицы объема 1 м<sup>3</sup>. Объем шара, вместимость багажника автомашины принадлежат к разряду *величин типа объема*. Из принципа их построения (объем равен произведению трех ребер) следует, что

$$\dim (\text{объем}) = (\text{длина})^3 \quad (6)$$

(объем, как и само пространство, «трехмерен»).

Величины одинакового рода, обладающие одной и той же размерностью, можно складывать и вычитать друг из друга, что приводит к возможности их сравнения (величина может быть «равна», «больше» или «меньше», чем другая того же рода). Сумма или разность двух таких величин принадлежит этому же *роду величин*, и в частности это верно для  $G_1 = \lambda G_2$  при  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

В одном из разделов механики — кинематике — наряду с «длиной» используется также «время», а механика в полном объе-

ме требует также введения «массы». *Скорость* вводится как

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}, \quad (7)$$

$$\dim v = \frac{\dim (\text{путь})}{\dim (\text{время})} = \text{длина} \cdot \text{время}^{-1},$$

а *ускорение* — как

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \quad (8)$$

$$\dim a = \frac{\dim v}{\dim t} = \text{длина} \cdot \text{время}^{-2}.$$

*Заключение:* при дифференцировании размерность производной равна отношению размерностей дифференцируемой величины и величины, по которой производится дифференцирование.

При интегрировании размерность подынтегрального выражения умножается на размерности стоящих при нем дифференциалов.

После введения понятия массы мы приходим на основании законов Ньютона (сила=масса·ускорение), с одной стороны, к единице силы как 1 ньютон (1 Н)=1 кг·1 м·с<sup>-2</sup> (так называемая когерентная единица, см. стр. 14), а с другой стороны, к соотношениям

$$\dim (\text{сила}) = \text{масса} \cdot \text{длина} \cdot \text{время}^{-2} = (\text{масса} \cdot \text{длина} \cdot \text{время}^{-1}) \times \\ \times \text{время}^{-1} = \dim (\text{импульс}) / \dim (\text{время}) = \dim \frac{dp}{dt}, \quad (9)$$

где через  $p$  обозначен импульс (количество движения), равный произведению массы на скорость. Следовательно, рассматривая силу и импульс лишь с точки зрения размерности, мы учитываем сразу обе формулировки второго закона Ньютона, а именно как равенство силы произведению массы на ускорение, так и равенство силы изменению импульса за единицу времени (более общая формулировка).

Бывает и так, что *величины разного рода* обладают *одной и той же размерностью*. Понятия механической работы или энергии и момента силы в корне различны. Ничего общего не имеют друг с другом и соответствующие математические величины (работа — скаляр, а момент силы — аксиальный вектор). Размерность их, однако, совпадает: это произведение сила·длина. В системе СИ имеются разные возможности для выражения единиц. Работе соответствует единица 1 джоуль (1 Дж)=1 ньютон·1 метр, тогда как момент силы — 1 Дж/рад (хотя обычно также и употребление единицы момента силы 1 Нм). Мы видим, что понятие размерности является чрезвычайно общим и может приводить к по-

тере строго физического определения понятий. Однако оно очень удобно для проверки того, что величины правильно сконструированы из исходных переменных. Проверяя размерности, мы можем замечать ошибки в математических выкладках. Что же касается более сложных математических величин (скаляры, векторы, тензоры), то каждая компонента данной величины должна иметь одинаковую размерность (а также измеряться в одних и тех же единицах).

### 2.3. Уравнения для физических величин

Опыт доказал плодотворность общего правила, согласно которому все *соотношения между величинами следует рассматривать как уравнения для этих величин*. Это означает, что входящие в них значения величин следует всегда брать в виде произведения числового значения и единицы измерения, так чтобы искомая величина получалась всегда снова как числовое значение, умноженное на произведение единиц измерения, причем это последнее может быть представлено как некоторая новая единица. Если придать при этом числовым множителям значение 1 (или степени десяти), то получаются *когерентные единицы*. Если же в уравнение для величин входят мировые константы или другие постоянные (характеризующие данный материал — например, удельная теплоемкость железа), то они представляют собой конкретные значения величин, характеризующих свойства определенных материалов, или являются универсальными значениями величин (например, скорость света в вакууме). Поэтому им, как и любым другим величинам, соответствуют единицы (часто говорят: «именованное число»), которые следует учитывать и в последующих соотношениях. Соответствующие правила содержатся в стандарте DIN 1313.

Мы поясним это на примере закона всемирного тяготения, который записывается как

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (10)$$

где  $F$  — сила, действующая между массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящимися на расстоянии  $r$  друг от друга. Коэффициент  $\gamma$  — *гравитационная постоянная*, подлежащая экспериментальному определению, когда заданы единицы измерения  $F$ ,  $m$  и  $r$ . В системе СИ это 1 Н, 1 кг и 1 м, так что

$$\gamma = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2. \quad (11)$$

Числовое значение и наименование следуют из опыта и использованной системы единицы. Конечно, здесь произведение единиц можно объединить в одно целое. При дальнейшем употреблении гравитационной постоянной ее

наименование должно всегда сохраняться при ней. Например, *напряженность поля силы тяжести на поверхности Земли* выражается формулой

$$g = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M_{\text{Земля}}}{r_{\text{Земля}}^2}, \quad (12)$$

и требующаяся на основании левой части равенства единица  $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$  (размерность ускорения) согласуется с его правой частью, если учитывать  $\gamma$  как именованное число.

Если в уравнении для величин участвуют математические функции, например  $\log$ ,  $\ln$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{exp}$  и т. п., то нужно иметь в виду, что их аргументом всегда должно быть только обычное, т. е. именованное число. В случае тригонометрических функций это приводит к выражениям вида  $\sin \omega t = \sin 2\pi \nu t$  или  $\sin(2\pi x/\lambda)$  и т. д., где  $t$  — время,  $\omega$  — круговая частота,  $\nu$  — частота,  $\lambda$  — длина волны. Соответственно для любого волнового процесса можно записать:

$$\sin(\omega t - 2\pi x/\lambda) = \sin 2\pi(\nu t - x/\lambda)$$

и т. п. Однако возникают и недоразумения и в основном с логарифмическими функциями. Тогда лучше всего обращаться к исходным уравнениям.

В качестве примера выведем формулу для давления пара Клаузиуса — Клапейрона из соотношения

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{Q}{V_{\text{пар}} - V_{\text{жидк}}}. \quad (13)$$

Здесь  $Q$  — теплота испарения на моль вещества (молярная теплота парообразования,  $\text{дж} = \text{энергия/количество вещества}$ , единица Дж/моль),  $V_{\text{пар}}$  — молярный объем вещества в газообразном состоянии при температуре  $T$ ,  $V_{\text{жидк}}$  — соответствующий объем в жидком состоянии. В предположении независимости теплоты парообразования от температуры и при  $V_{\text{жидк}} \ll V_{\text{пар}}$  (1 моль  $\text{H}_2\text{O}$  в жидком состоянии соответствует около  $18 \text{ см}^3$ , а в газообразном — около  $22 \cdot 400 \text{ см}^3$ ) получим, воспользовавшись для паров воды уравнением состояния идеального газа,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{p}{RT} Q, \quad \frac{dp}{p} = \frac{Q}{R} \frac{dT}{T^2}. \quad (14)$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения дает

$$\ln \frac{p}{p_0} = - \frac{Q}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (15)$$

или

$$p = p_0 \exp \left[ - \frac{Q}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]. \quad (16)$$

В качестве аргументов используемых здесь математических функций фигурируют обычные числа (безразмерные величины). Однако если воспользоваться упрощенной записью

$$\ln p = \text{const} - \frac{Q}{RT} \quad (15a)$$



или

$$p = k_1 e^{-k_2/T}, \quad (16a)$$

то будут утеряны использованные единицы и размерности. При этом можно избежать ошибок в расчетах лишь в том случае, если добавить пространственные разъяснения о характере постоянных и об использованных единицах, так что последние формулы — это уже не уравнения для величин.

## 2.4. Углы

Особого рассмотрения требует вопрос о *плоских* (рис. 2) и *телесных* (рис. 3) *углах*. При измерении плоского угла исполь-

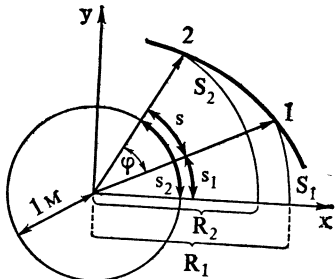


Рис. 2. К определению угла в радианах.

Дуга 1 — 2 является, например, отрезком плавной орбиты.

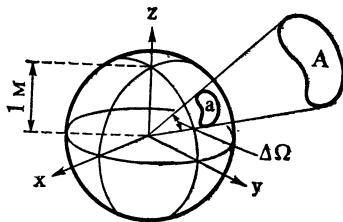


Рис. 3. Определение телесного угла.

зуется угол (обозначаемый как  $^\circ$ ), а также «дуговая мера» — «длина дуги круга единичного радиуса». В обоих случаях речь идет об отношении величины длины дуги к радиусу:

$$\varphi = \frac{s}{l_m} = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{s_2}{l_m} - \frac{s_1}{l_m} = \frac{s_2}{R_2} - \frac{s_1}{R_1}.$$

Чтобы подчеркнуть отличие от градусной меры, к числовому значению  $\varphi$  добавляют название «рад» (радиан). Если, например,  $s=1$  м, то единица  $\varphi=1$  м/1 м=1 рад, что соответствует  $57^\circ 17' 44,80625''$ .

Подобным же образом поступают при описании телесного угла:

$$\Omega = \frac{a}{l_m^2}.$$

Здесь  $a$  — площадь участка поверхности (в единицах  $m^2$ ) шара радиуса 1 м. Если  $A$  — участок поверхности шара радиуса  $R$ , то

$$\Omega = \frac{a}{l_m^2} = \frac{A}{R^2}.$$

К единице телесного угла мы приходим при  $a=1$   $m^2$ , что дает  $\Omega=1$  ср (стерадиан). Следовательно, полный плоский угол ( $360^\circ$ ) имеет  $\varphi=2\pi$  рад, а полный телесный угол ( $a$  — полная величина площади поверхности шара) —  $\Omega=4\pi$  ср. Сокращения «рад» или «ср» часто отбрасываются.

Введение системы базисных величин означает, что речь идет о попытке ограничить множество возможных величин и единиц возможно меньшим числом *базисных величин* и соответствующих им единиц. Тогда все остальные необходимые величины могут быть найдены или определены на основе базисных как *производные величины*. Прежде всего мы установим, что, как правило, построение новых величин осуществляется лишь путем умножения (или деления) старых. Тем самым, например, исключается, чтобы в качестве базисной величины использовалась площадь, поскольку иначе пришлось бы при образовании величин типа длины прибегать к извлечению квадратного корня из величины типа площади. Флейшманн [2, 3] занимался проблемами структуры системы физических понятий; он дал следующую сводку результатов своего исследования (прежде всего для механики). Пусть разные типы величин (размерности) обозначаются через  $A, B, C$ . Тогда справедливы следующие соотношения.

1. Из  $A$  и  $B$  строится новый тип величин  $C = A \cdot B$  (*мультипликативная связь*).
2. Существуют неименованные числа, обозначаемые через  $(1) = (A^0)$ , которые при умножении на  $A$  не изменяют размерности этого типа величин.  $A \cdot (1) = A$  (*единичный элемент*).
3. Всякому типу величин соответствует *обратный тип величин*,  $A^{-1}$ , для которого  $A \cdot A^{-1} = (1)$ .
4. Связи между величинами разных типов подчиняются: *ассоциативности*,  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  и *коммутативности*,  $A \cdot B = B \cdot A$ .
5. Для всех  $A \neq (1)$  и  $m \in \mathbb{N} \setminus 0$  справедливо  $A^m \neq (1)$ .
6. Полное множество, состоящее из бесконечного числа типов величин, обладает *конечной производящей системой*. Это означает, что имеется конечное число  $(N)$  элементов  $C_1, C_2, \dots, C_N$ , через которые любой тип величины  $X$  может быть представлен в виде

$$X = C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2} \dots C_N^{\alpha_N}$$

при целочисленных  $\alpha_i$ . Однозначность такого представления заранее не предполагается.

Утверждения 1—6 образуют полную систему аксиом абелевой группы. При учете основных уравнений теории электричества, магнетизма, гравитации и термодинамики они остаются неизменными. Теперь мы воспользуемся теоремой, справедливой для

абелевой группы: среди  $N$  элементов производящей системы  $C_1, \dots, C_N$  имеется подмножество  $n \leq N$  элементов  $B_1, \dots, B_n$ , обладающее тем свойством, что каждый элемент может быть *однозначно* представлен в виде

$$X = B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \dots B_n^{\beta_n},$$

где числа  $\beta_i$  целые. Элементы  $B_1, \dots, B_n$  называются *базисом группы*. Здесь  $B_i$  — *основные типы величин*. Произведения вида  $\Pi B_i^{\beta_i}$  представляют собой произведения размерностей основных типов величин  $B_i$ . Имеет место

*Теорема.* Группа, удовлетворяющая аксиомам 1—6, обладает по меньшей мере одним базисом  $B_1, \dots, B_n$ , причем в случае, когда  $n > 2$ , существует бесконечное множество равноценных базисов.

Как определить число элементов некоторого базиса? В данной области физики задается  $k$  взаимно независимых уравнений для  $l$  типов величин ( $l > k$ ). Тогда  $n = l - k$  из них остаются неопределенными, они не могут быть выведены на основании других величин и являются поэтому основными.

В механике лучше всего известен базис, состоящий из длины ( $l$ ), массы ( $m$ ) и времени ( $t$ ). Для геометрии достаточно только  $l$ , в кинематике требуются  $l$  и  $t$  и, наконец, в динамике —  $m$ ,  $l$  и  $t$ . Как уже было отмечено, площадь, масса и время базиса не образуют. Однако импульс  $p$ , энергия  $W$  и действие  $S$  дают в совокупности базис. Его связь с базисом  $(m, l, t)$  выражается как

$$p = l^1 m^1 t^{-1}, \quad W = l^2 m^1 t^{-2}, \quad S = l^2 m^1 t^{-1}, \quad (1)$$

откуда однозначно следует

$$l = p^{-1} W^0 S^1, \quad m = p^2 W^{-1} S^0, \quad t = p^0 W^{-1} S^1. \quad (2)$$

Рассмотрим *общий случай* базиса  $A_1, A_2, A_3$  из 3 элементов. Назовем новый базис  $B_1, B_2, B_3$ ; для него должно выполняться

$$B_1 = A_1^{\alpha_{11}} A_2^{\alpha_{12}} A_3^{\alpha_{13}}, \quad B_2 = A_1^{\alpha_{21}} A_2^{\alpha_{22}} A_3^{\alpha_{23}}, \quad (3)$$

$$B_3 = A_1^{\alpha_{31}} A_2^{\alpha_{32}} A_3^{\alpha_{33}}.$$

Требуется найти возможность однозначного преобразования от базиса к базису при условии, что показатели степени  $\alpha_{ik}$  — целые числа. Логарифмируя соотношения (3), получаем

$$\log B_1 = \alpha_{11} \log A_1 + \alpha_{12} \log A_2 + \alpha_{13} \log A_3,$$

$$\log B_2 = \alpha_{21} \log A_1 + \alpha_{22} \log A_2 + \alpha_{23} \log A_3,$$

$$\log B_3 = \alpha_{31} \log A_1 + \alpha_{32} \log A_2 + \alpha_{33} \log A_3.$$

Для однозначной разрешимости этой системы относительно  $A_1, A_2$  и  $A_3$  требуется, чтобы определитель, составленный из коэффи-

циентов, был отличен от нуля:

$$\det(\alpha_{ik}) \neq 0.$$

В результате получим при целочисленных  $\beta_{ik}$  выражение  $\log A_1 = (\beta_{i1} \log B_1 + \beta_{i2} \log B_2 + \beta_{i3} \log B_3) / \det(\alpha_{ik})$ .

Следовательно, показатели степени при прямом и обратном преобразованиях будут целочисленными лишь тогда, когда  $\det(\alpha_{ik}) = \pm 1$  (знак зависит лишь от порядка расстановки элементов). Легко убедиться, что приведенный выше конкретный пример согласуется с этим общим рассмотрением. Действительно, из преобразований (1) и (2) видно, что в этом случае  $|\det(\alpha_{ik})| = 1$ .

Мы можем теперь указать в механике целый ряд эквивалентных друг другу базисов. Флейшманн дает в качестве примеров базисы

$$\{l, m, t\}, \quad \{l, W, t\}, \quad \{l, S, t\}, \quad \{p, S, t\}, \quad \{p, W, t\}, \\ \{p, W, P\}, \quad \{p, W, S\}, \quad \{l, W, S\}, \quad \{\Phi_V, l, S\},$$

где  $P$  — мощность, а  $\Phi_V$  — потенциал скорости.

Система СИ использует в основе механики базис  $\{l, m, t\}$ . Учет электромагнетизма добавляет сюда еще силу электрического тока. Термодинамика требует включения температуры, а для фотометрии нужно, наконец, добавить последний элемент — силу света.

## 4 Единицы системы СИ (Международной системы единиц)

Уже из потребностей каждодневной жизни ясна необходимость введения и использования легко воспроизводимых единиц измерения, которые были бы к тому же по возможности долговечными. Реализовать эту программу было лучше всего, воспользовавшись в определениях теми взаимосвязями, которые уже существуют в природе и которые признавались неизменными. При этом сыграло свою роль и развитие научного знания в атомной области, где мы усматриваем сейчас неизменные меры, к которым стремимся свести единицы измерения.

Международная система единиц (СИ) была установлена в международных масштабах в 1960 г. на XI Генеральной конференции по мерам и весам. Она основывается на базисных единицах, приведенных в табл. 2. Эти базисные единицы вместе с дополнительными единицами и когерентными производными единицами (табл. 3) называются единицами СИ. При этом единицы, которые следуют из последних, согласно правилам СИ, как десятичные кратные или дробные (см. табл. 1), называются кратными или дробными единицами СИ. Исключение составляет в силу причин исторического характера лишь килограмм.

Особое внимание было обращено на то, чтобы при этом не играло роли отношение единиц к свойствам конкретных веществ. Так были отброшены, например, такие единицы, как атмосфера, и торр (торричелли).

Таблица 2

Базисные единицы системы СИ

Тип величины	Название единицы	Сокращенное обозначение базисной единицы
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Сила электрического тока	ампер	А
Температура	кельвин	К
Сила света	кандела	кд
Количество вещества	моль	моль
Плоский угол	радиан	рад
Телесный угол	стерадиан	ср

Таблица 3

## Когерентные производные единицы системы СИ

Тип единицы	Название единицы СИ	Сокращение	Отношение к другим единицам СИ
Сила	ньютон	Н	$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$
Давление и механическое натяжение	паскаль	Па	$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$
Энергия, работа	джоуль	Дж	$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$
Мощность	ватт	Вт	$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1}$
Заряд	кулон	Кл	$1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$
Электрическое напряжение	вольт	В	$1 \text{ В} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{А}^{-1}$
Электрическая емкость	фарада	Ф	$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл} \cdot \text{В}^{-1}$
Электрическое сопротивление	ом	Ом	$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В} \cdot \text{А}^{-1}$
Электрическая проводимость	сименс	См	$1 \text{ См} = 1 \text{ Ом}^{-1}$
Магнитный поток	вебер	Вб	$1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$
Плотность магнитного потока	тесла	Т	$1 \text{ Т} = 1 \text{ Вб} \cdot \text{м}^{-2}$
Индуктивность	генри	Г	$1 \text{ Г} = 1 \text{ Вб} \cdot \text{А}^{-1}$
Световой поток	люмен	лм	$1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot \text{ср}$
Освещенность	люкс	лк	$1 \text{ лк} = 1 \text{ лм} \cdot \text{м}^{-2}$
Частота	герц	Гц	$1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$
Преломляющая способность	диоптрия	дпт	$1 \text{ дпт} = 1 \text{ м}^{-1}$

Некоторые из когерентных производных единиц СИ (т. е. произведений степеней базисных единиц с числовым множителем 1) получили самостоятельные названия с соответствующими сокращениями. Все названия, образованные из фамилий ученых, в сокращениях пишутся с большой буквы. При этом следует обращать внимание на порядок следования букв: 1 Нм есть 1 ньютон-метр, тогда как 1 мН — 1 миллиньютон. Во избежание обозначений, несущих малую смысловую нагрузку, единицу 1 герц = 1 Гц следует использовать лишь для обозначения частоты, а единицу 1 диоптрия = 1 дпт — лишь для обозначения преломляющей способности оптической системы (как, например, не следует употреблять Гц/дпт для обозначения некоторой величины со смыслом скорости).

Роль системы СИ определяется целым рядом ее свойств, которые делают эту систему особенно удобной для применения в теории и на практике.

1. Единицы СИ универсальны и применимы во всех областях физики и техники, так как не имеют никакого отношения к свойствам конкретного материала.

2. Эти единицы могут быть реализованы с достаточной степенью точности в соответствии со своими определениями или эквивалентными им соотношениями.
3. Система СИ абсолютна: сила или энергия любой природы может быть выражена в действующих в этой системе *механических* единицах (соответственно силы или энергии).
4. В случае электродинамики здесь действует когерентная система четырех единиц с электрической базисной единицей (система МКСА).
5. Система СИ принята в международных масштабах и все шире вводится в законодательном порядке. В ФРГ она введена *Законом о единицах измерений от 2 июля 1969 г.* [4] и *Распоряжением по выполнению Закона о единицах измерений от 26 июня 1970 г.* [5]. Как Закон, так и Распоряжение вступили в силу 5 июля 1970 г.

В приложении II сопоставлены остальные единицы СИ и указаны ограничения сроков, до которых допустимо еще использование других единиц. Кроме того, были введены еще две единицы в атомной физике, а именно 1) атомная единица массы (а. е. м.) —  $1/_{12}$  массы атома изотопа  $^{12}\text{C}$  и 2) электронвольт (эВ) — атомная единица энергии. Кроме того, допускаются особые обозначения для официальных единиц:

1 тонна =  $1\text{ т} = 10^3\text{ кг}$ ; 1 литр =  $1\text{ л} = 1\text{ дм}^3$ ;  $1\text{ а} = 100\text{ м}^2$ , а также  $1\text{ га} = 100\text{ а}$  (при измерении площади участков земли);  $1\text{ бар} = 10^5\text{ Па}$ ;  $1\text{ вольтампер} = 1\text{ В} \cdot \text{А}$ ;  $1\text{ вольтсекунда} = 1\text{ В} \cdot \text{с} = 1\text{ Вб}$ ; разность температур:  $1\text{ градус Цельсия} = 1^\circ\text{C} = 1\text{ К}$ . После 1977 г. прекращают действовать единицы: калория, все единицы давления (кроме бар и Па), радиологические единицы кюри, рад, рем, рентген. Вместо них принимаются:  $1\text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10}\text{ с}^{-1}$ ,  $1\text{ рад} = 10^{-2}\text{ Дж/кг}$ ,  $1\text{ рем} = 10^{-2}\text{ Дж/кг}$ ,  $1\text{ Р} = 258 \cdot 10^{-6}\text{ Кл/кг}$ .

Существует ряд единиц, в основе которых лежат атомистические представления. Их стремятся относить к единице массы. В этом случае преимущество состоит в том, что все числовые значения изменяются одним и тем же образом при изменении массы. Это справедливо прежде всего для следующих величин:

а) для числа Авогадро (или Лошмидта). Это число атомов ядер  $^{12}\text{C}$ , содержащихся в 12 г углерода. Оно изменится лишь в том случае, если уточнится масса атома  $^{12}\text{C}$ ;

б) для моля как количества вещества. Моль — это совокупность такого числа частиц вещества, каково число атомов, содержащихся в 12 г углерода (см. п. а). В приложении к углероду: его количество, содержащее 1 моль, обладает массой 12 г; число Авогадро равно приблизительно  $6 \cdot 10^{23}\text{ моль}^{-1}$ .

## 5 Реализация единицы длины

### 5.1. Исторический обзор

Начнем с краткого *обзора истории развития* представлений о единицах длины. Малые длины первоначально измерялись путем сравнения с индивидуальными измерительными объектами. Об этом напоминают до сих пор старые наименования единиц: пядь, локоть, фут, сажень. Большие расстояния сопоставлялись друг с другом и совершенно иным способом — говорили о часе пути, о дне пути, однако мы не будем останавливаться на этом методе. Вскоре сравнение с индивидуальными размерами, присущими телу отдельного человека и потому различными, перестало соответствовать все возрастающим требованиям точности (например, при землемерных работах в Египте). Требовалось создать единый и устойчивый масштаб. Его пытались вводить главным образом власти, и, как нетрудно понять, в результате возникло такое количество запутанных единиц в области мер и весов, что это стало мешать развитию хозяйственных отношений. В 1800 г. в одном только Бадене было 112 разных мер, которые все носили наименование «локоть», и 92 единицы площади. Иногда меняли и величину самой единицы. Рассказывают, что в 1804 г. прусский король увеличил площадь своих владений очень просто — он приказал уменьшить длину почтовой мили, «так что теперь, проехав семь миль, оставляешь за собой всего четыре!» [6]. Это может служить примером незнания закона инвариантности величин.

Еще в XVII столетии ставился вопрос о создании единых единиц измерения, но решающий шаг к введению единой (метрической) системы был сделан лишь после Французской революции. Национальное собрание Франции приняло решение о необходимости ликвидации «странного и обременительного многообразия мер» и поручило 8 мая 1790 г. Французской Академии наук разработать применимую во всем мире систему мер и весов. Обсуждалось использование трех естественных основ для определения единицы длины: 1) длина маятника с периодом колебаний 1 с (период колебаний математического маятника  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$  зависит только от его длины), 2) длина одной четвертой части экватора Земли, 3) длина одной четвертой меридиональной окружности Земли. Первое из этих предложений наталкивалось на ту трудность, что прежде следовало установить воспроизводимую единицу времени (которую тогда еще было невозможно реализовать с требуемой степенью точности), и к тому же ускорение силы тяжести  $g$  зависит от положения маятника на поверхности Земли. Второе предложение было отвергнуто ввиду трудной доступности



земного экватора, правильность формы которого была к тому же установлена не так строго, как правильность меридиана. Поэтому выбор пал на длину меридиана, и единица длины должна была равняться точно  $10^{-7}$  части от одной четвертой меридиональной окружности. Измерить ее поручили астрономам Ж. Б. Ж. Деламбру и П. Ф. Мешэну. Для измерения отрезка меридиана они

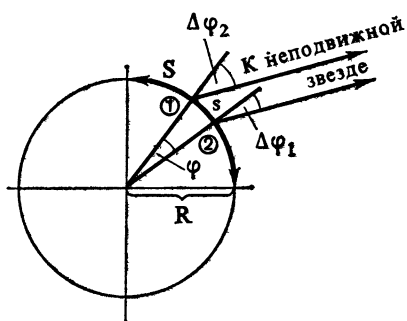


Рис. 4. Определение одной четвертой части окружности меридиана Земли по астрономическим наблюдениям и по измерению длины дуги  $s$ .

воспользовались методом триангуляции, развитым В. Снеллиусом и применяемым по сей день в геодезии. Был выбран меридиан, проходящий через Париж (около  $2^\circ$  восточной долготы), а в качестве концов отрезка взяты Дюнкерк и Барселона (расстояние между ними около 1100 км). За базу триангуляции было выбрано расстояние от Льеёна до Мелёна (около 13 км), величина которого была известна в одних из старых единиц — туазах. В ходе триангуляции

были промерены 100 треугольников, в ряде случаев — до 170 раз. В результате стало известно расстояние в туазах между пунктами 1 и 2 (рис. 4). Географические широта и долгота этих пунктов были измерены с очень большой точностью; тогда при наблюдении некоторой неподвижной звезды при известных значениях географической широты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  следует

$$\begin{aligned}\varphi_1 - \Delta\varphi_1 &= \varphi_2 - \Delta\varphi_2, \\ \varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1,\end{aligned}$$

что дает длину одной четвертой окружности меридиана:

$$\frac{S}{90^\circ} = \frac{s}{\varphi}, \quad S = s \frac{90^\circ}{\varphi}.$$

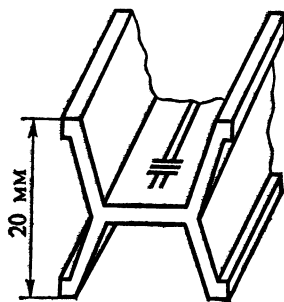
Таким образом было обнаружено, что длина  $S$  равна 5 130 740 туазам, так что для метра получилось выражение

$$1 \text{ м} = 0,513074 \text{ туаза}.$$

Так удалось прийти к неизменному стандарту меры, и был изготовлен эталон — платиновая концевая мера длины. 10 декабря 1799 г. во Франции была введена метрическая система мер и весов, о которой было претенциозно сказано, что она предназначена «для всех времен, для всех народов» <sup>1)</sup>. Однако исполь-

<sup>1)</sup> Так выбито на памятной медали 1840 г., восходящей к модели 1799 г. [7].

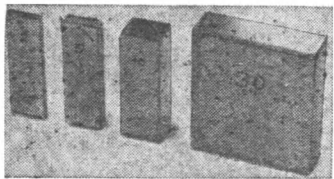
Рис. 5. Внешний вид прототипа метра (его полная длина равна 102 см).



зование неметрических единиц было запрещено во Франции лишь в 1840 г., Пруссия и Северогерманский союз ввели метрическую систему в 1868 г., а Германская империя — в 1872 г. Метрическая система была допущена наряду с англо-саксонскими единицами в Британской империи и США с 1897 г.

В ходе развития измерительной техники эталон метра оказался недостаточно точным, а как концевая мера длины — часто неэффективным, к тому же нельзя было вполне полагаться на неизменность материала, а значит, на постоянство самого эталона. Поэтому он был заменен штриховым масштабом из платино-иридиевого сплава (90% Pt, 10% Ir), неизменность которого можно было считать более гарантированной. Этот новый эталон, который теперь иногда ошибочно называют «первым прототипом метра», в поперечном разрезе обладает таким асимметричным х-образным профилем (рис. 5), что его средняя линия проходит по поверхности желоба. В желобе вырезаны две группы штрихов, по три штриха в каждой, и расстояние между средними штрихами равно 1 м. С тех пор метр считался определенным через этот эталон. При этом фактически отпала ссылка на длину  $1/4$  земного меридиана, тем более, что уже в 1837 г. *Бессель* установил, что новая единица была несколько короче задуманной (по новейшим измерениям 1964—1967 гг. — на  $2 \cdot 10^{-4}$  м = 0,2 мм; длина  $1/4$  меридиана равна 10 001 954,5 м). Однако и в отношении нового эталона не было уверенности, что его длина не станет очень слабо изменяться в силу явлений перекристаллизации материала. Предполагают даже, что между 1889 г. (по I Генеральной конференции по мерам и весам) и 1957 г. эталон укоротился на 0,5 мкм. Это обусловило поиски другого выражения эталона. Кроме того, значительно возросли требования к точности измерений. В 1800 г. считалась вполне достаточной точность измерения длины, равная 0,25 мм; к 1900 г. предельные требования дошли до 0,01 мм, к 1950 г. — до 0,25 мкм, а сейчас существуют отрасли промышленности, где работают с точностью  $10^{-9}$ — $10^{-10}$  м [8]. Пределы точности национальных эталонов метра составляют около  $10^{-7}$  м.

Так называемые концевые меры (рис. 6) — металлические пластины определенной толщины, используемые в тонкой механике, — выполняются в разных классах точности (DIN 861). Для класса 0 (исходная мера для всех более грубых мер) при длине  $l$  допустимая погрешность равна



$$\Delta l = \pm \left( 0,1 + 0,002 \frac{l}{\text{мм}} \right) \text{ мкм.}$$

Рис. 6. Примеры концевых мер длины в точной механике.

Такая точность уже неприложима к платино-иридиевому эталону.

Не было недостатка в попытках изготовить более легко воспроизводимые эталоны. Начиная с 1927 г. для этого ставились опыты с кварцевыми масштабными, которые поддаются сравнению друг с другом при помощи интерференционных методов с точностью  $10^{-8}$  м. Сравнение их с платино-иридиевым эталоном дало, однако, точность лишь  $10^{-6}$  м. Сами по себе кварцевые стержни обеспечивают более точную систему, но они не допускают перенесения точности на обычные эталоны [9].

## 5.2. Интерферометрия

Ко времени проведения I Генеральной конференции по мерам и весам (1889 г., введение эталона метра) А. А. Майкельсон и Э. У. Морли [10] указали, что с помощью интерферометра (интерферометра Майкельсона, сокращенно ИМ) возможно сопоставление метра с длиной волны светового излучения, т. е. определение того, сколько длин волн света укладывается на 1 м. В ИМ (рис. 7) пучок света от возможно более монохроматического источника  $Q$  расщепляется делителем  $S$  (полупрозрачное зеркало) на два пучка, один из которых отражается затем от зеркала  $S_1$ , а другой — от зеркала  $S_2$ . Эти два пучка объединяются затем в  $B$ . Мнимое изображение зеркала  $S_1$  на плече  $S_2$  находится в положении  $S'_1$ . В положении  $B$  имеет место минимум интерференции, если расстояние  $2d$  равно целому кратному используемой длины волны. Путем подсчета смены минимумов и максимумов при перемещении зеркала  $S_2$

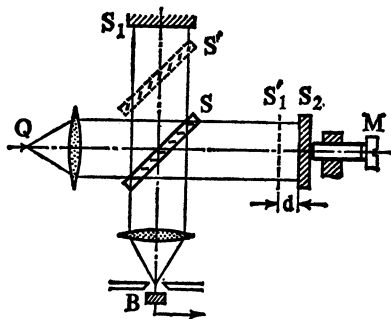
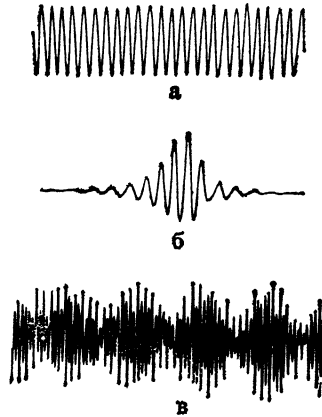


Рис. 7. Схема интерферометра Майкельсона.

Через  $B$  обозначено положение, например фотодиода, измеряющего интенсивность освещения

Рис. 8. Интерферограммы, полученные с помощью интерферометра Майкельсона.



можно производить калибровку микрометрического винта  $M$  в длинах волн.

При работе с интерферометром поступают следующим образом. Используется более или менее протяженный источник света  $Q$ , чтобы в  $B$  можно было наблюдать систему интерференционных колец Фраунгофера. В центре колец при изменении  $d$  наблюдается возникновение новых колец или исчезновение старых. В современных регистрирующих интерферометрах в  $B$  помещается фотодиод, подключенный к счетно-регистрирующему электронному устройству. Если регистрируется зависимость интенсивности света в центре системы колец от расстояния  $d$ , получается так называемая *интерферограмма*, три примера которой приведены на рис. 8. На рис. 8, а представлена оптимальная для измерения метра картина, которую можно получить с помощью лазера как источника света. Требуется еще ввести нулевую отметку, которую следует связать с положением  $d=0$ , чтобы получить воспроизводимое начало отсчета. Это осуществляется с помощью интерферограммы белого света, которая изображена на рис. 8, б. Колебания интенсивности заметны здесь лишь в малой окрестности около  $d=0$ . Интерференция быстро пропадает, так как условия образования максимумов и минимумов включают в себя длину волны. Это тот самый случай, когда нет худа без добра: середина интерферограммы на рис. 8, б определяет точку  $d=0$ . Конечно, интерферометр должен быть при этом строго юстирован таким образом, чтобы действительно было обеспечено совпадение длин оптических путей до зеркал  $S_1$  и  $S_2$ . Это обеспечивается, например, внесением корректирующей стеклянной пластинки  $S^0$  точно такой же толщины, что и  $S$ , чтобы скомпенсировать путь, пройденный лучом в стекле к зеркалу  $S_2$ <sup>1)</sup>. Как видно из интерферограммы на рис. 8, в, свет обычной ртутной лампы не пригоден для измерения метра, ибо в этом спектре присутствуют отдельные дискретные длины волн. Необходима хорошая монохроматичность спектра лампы. Она определяется так называемой длиной когерентности — тем расстоянием  $d$ , на которое может быть произведен сдвиг без размывания системы колец.

<sup>1)</sup> В предположении использования интерференции белого света такая компенсирующая пластинка должна быть поставлена на пути луча ввиду дисперсии света в стекле, иначе можно было бы ввести для компенсации просто начальный сдвиг  $d_0$ .

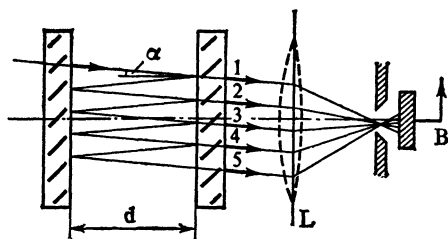


Рис. 9. Схема интерферометра Фабри — Перо.

полосы равной ширины, а нулевая линия интерферограммы для белого света видна в поле зрения трубы в сопровождении цветных полос по сторонам, постепенно становящихся все более размытыми. Когда расстояние до зеркала увеличивается, наблюдается картина бегущих полос (для монохроматического света) в поле зрения зрительной трубы. Такого типа картина изображена на рис. 17.

Майкельсон и Бенца провели в 1892—1893 гг. первые опыты с наибольшим расстоянием 20 см, используя красную линию кадмия с  $\lambda = 644$  нм ( $= 6440 \text{ \AA}$ ), обладающую наибольшей известной тогда длиной когерентности. Расчеты показывают, что на протяжении 20 см должно насчитываться около  $3 \cdot 10^5$  максимумов или минимумов. Если при этом каждую секунду регистрировать одну полосу, то экспериментаторам пришлось бы затратить на их счет около 80 часов, т. е.  $3 \frac{1}{3}$  дня! При более новых измерениях используют метод частичных примеров, к которому мы еще возвратимся позднее. В 1905—1906 гг. и в 1913 г. Бенца, Фабри и Перо воспользовались другим интерференционным спектрометром, более простым в обращении при прецизионном сравнении масштабов. Интерферометр Фабри — Перо (ИФП, рис. 9), который в современной спектроскопии сохраняет репутацию отличного инструмента, также использует параллельный пучок света от протяженного источника. Здесь происходит многолучевая интерференция — интерферируют друг с другом лучи 1, 2, 3 и т. д., так что в плоскости изображения В возникает система колец. Разность фаз двух непосредственно следующих друг за другом дробных лучей в проходящем свете равна

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол падения света. При переходе от максимума к минимуму величина  $\delta$  изменяется на  $2\pi$ . Отношение  $d/\lambda$  порядка нескольких десятков тысяч. Существенное отличие от ИМ состоит в том, что невозможно установить значение разности хода  $d=0$ . Поэтому такой интерферометр пригоден лишь для сравнения малых расстояний. При больших расстояниях (сейчас дости-

В принципе счет интерференционных полос (или максимумов интерферограммы) в точности совпадает с процедурой измерения метра в длинах волн. На практике можно воспользоваться несколькими видоизмененным способом наблюдения для отыскания определенной картины полос. Пусть, например, найдено положение  $d=0$ , после чего одно из зеркал  $S_1$  или  $S_2$  немного наклоняется. В зрительную трубу при этом будут наблюдаться

гающих 1 м) сначала ставят меньшие «эталон», длиной около 20 см, а затем шаг за шагом (по 20 см) продвигаются дальше. На рис. 10 представлена схема установки Вайселе, с помощью которой измеряются и более длинные отрезки [9]. Если отрезок  $AB$  равен 1 м, то сначала проверяют, что и  $BC=1$  м, так что сумма дает 2 м, и аналогично действуют дальше.

Интересны также методы комбинирования ИМ и ИФП, расстояние между которыми на стенде измеряется интерферометрически. Установку с двумя ИФП использовали уже в 1913 г. *Бенца, Фабри и Перо*. Был взят один ИФП с  $d=6,25$  см, а другой такой же расположен на расстоянии  $12,5 \text{ см} = 2d$  от него. Получилась новая интерференционная система, допускающая точную юстировку расстояния. Далее она нарицается сравнением с 25-сантиметровым ИФП и т. д. С 1892 по 1940 г. таким образом были проведены девять промеров красной линии кадмия и найдено, что на 1 м укладывается точно 1 553 164, 13 ее длины волны. Следовательно, длина волны красной линии кадмия равна  $\lambda_{Cd} = (643,84696 \pm 0,0001) \text{ нм}$

(в воздухе при  $15^\circ\text{C}$ , 1,013 бар (=1 атм), 0,03%-ном объемном содержании  $\text{CO}_2$ ). В 1927 г. это значение было допущено в качестве стандарта *наряду* с эталоном метра. Недостатком такого определения является связь с конкретными условиями среды.

Основания для выбора данной линии мы рассмотрим теперь, исходя из схемы термов атома кадмия (рис. 11).

Схема термов — это схема энергетических уровней. Чем выше горизонтальный штрих, тем больше энергия соответствующего состояния атома. При переходе атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией разность энергий излучается атомом:  $\Delta E = h\nu$ . Термы обозначаются с помощью символов (сгруппированных соответствующим образом), которые указывают величину момента импульса. Орбитальный момент импульса электронов (всех вместе взятых) обозначается большими буквами  $S, P, D, F, \dots$  (что соответствует значениям квантового числа момента импульса 0, 1, 2, 3, ...). Правый нижний индекс дает квантовое число полного момента  $J$ , а левый верхний характеризует мультиплетность (кратность) термов, равную  $2S+1$ , где  $S$  — значение полного спина (здесь равное 0 или 1).

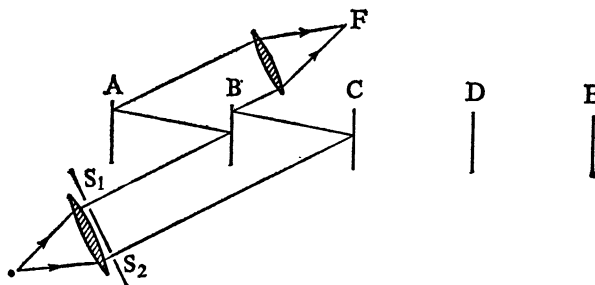


Рис. 10. Установка Вайселе для измерения длин до 100 м.

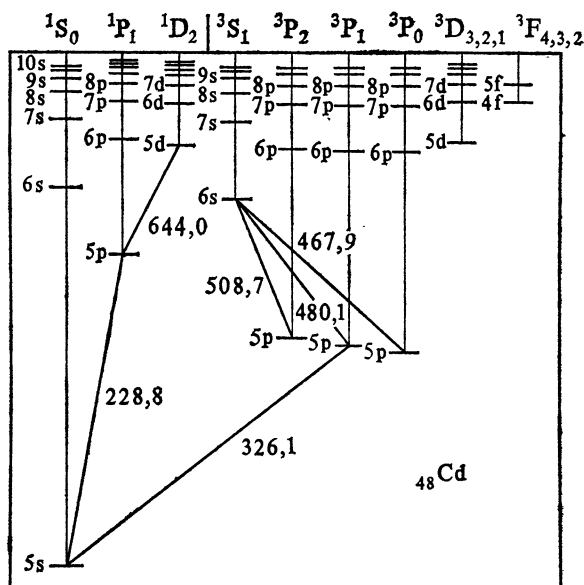


Рис. 11. Схема термов атома кадмия.

Длины волн даны в нанометрах. Переход, отмеченный величиной 644 нм, был принят в 1927 г. в качестве эталонного.

Каждая из двух последних электронных оболочек атома кадмия соответствует конфигурации  $4d^{10}5s^2$ <sup>1)</sup>. Ввиду наличия в  $5s$ -оболочке обоих  $s$ -электронов получается синглет-триплетная схема термов, подобная известной для гелия ( ${}^2\text{He}$ ,  $1s^2$ ) или для ртути ( ${}_{80}\text{Hg}$ ,  $5d^{10} 6s^2$ ). Поэтому в спектре содержатся простые (синглетные) и тройные (триплетные) линии. Та линия, о которой идет речь, соответствует переходу  $5^1D_2 \rightarrow 5^1P_1$  синглетной системы и является простой, так что ее длина волны, естественно, точнее определена, чем у триплетной линии (например, соответствующей переходу  $6^3S_1 \rightarrow 5^3P_{2,1,0}$ ).

Прежде чем перейти к современному определению метра, обсудим еще некоторые *спектроскопические предпосылки прецизионного измерения длины*. С выбором стандарта длины волны оказался связан тот неожиданный недостаток, что линии спектра обладают неудовлетворительной резкостью и дают

<sup>1)</sup> Обычно расположение электронов вокруг атома характеризуют как их конфигурацию (см., например [11], задавая значения главного квантового числа, соответствующие оболочкам ( $n=1, 2, \dots$ ), тогда как подоболочки характеризуются значениями квантового числа орбитального момента ( $l=0, 1, \dots, n-1$ , чему соответствуют малые буквенные обозначения  $s, p, d, f, \dots$ ). Верхние индексы указывают количество электронов. У атома кадмия их 48, и полная конфигурация записывается как  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2$ . В этом случае все оболочки окончательно заполнены в согласии с принципом Паули,

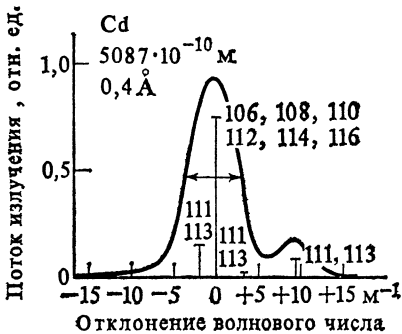


Рис. 12. Профиль линии излучения кадмиевой лампы с естественной смесью изотопов.

Числа 106, 108 и т.д. указывают массы ядер, входящих в состав смеси.

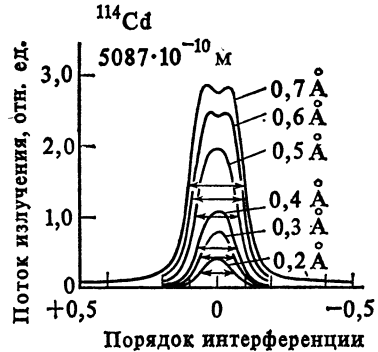


Рис. 13. Профиль линии излучения чистого изотопа  $^{114}\text{Cd}$  в зависимости от силы тока лампы.

в результате очень ограниченное число различных интерференционных полос. В этом повинны многочисленные обстоятельства. Прежде всего дело в том, что элементы, как правило, включают в себя целый ряд изотопов, т. е. ядер, имеющих один и тот же заряд (и поэтому представляющих один и тот же химический элемент), но разные массы (вследствие наличия в ядре разного числа нейтронов). Например, в природном кадмии содержатся ядра с массовыми числами 106 (1,22%), 108 (0,88%), 110 (12,39%), 111 (12,75%), 112 (24,07%), 113 (12,26%), 114 (28,86%) и 116 (7,58%), о чем не было известно еще в начале этого века. Так как ядро участвует в движении всей атомной системы около центра масс, это сказывается на энергетических состояниях электронной оболочки, и атомы разных изотопов испускают лишь приблизительно одинаковое по длине волны излучение. Кроме того, часто имеет место магнитное взаимодействие между ядром и оболочкой, приводящее к сверхтонкой структуре терма. Это относится в данном случае лишь к изотопам с нечетным массовым числом (111 и 113, спин ядра равен  $1/2\hbar$ ), так как число протонов ( $Z=48$ ) у кадмия всегда четно. Вследствие наличия сверхтонкой структуры синглетные линии бывают на самом деле расщепленными. На рис. 12 изображен профиль другой линии излучения кадмия, и по нему можно судить о составе излучения. Положение может быть существенно улучшено, если использовать источник света с одним чистым изотопом, например  $^{114}\text{Cd}$  (рис. 13). Однако другие вклады в ширину линий при этом сохраняются. Речь идет прежде всего о так называемой «естественной ширине линии»  $\Delta\lambda \approx 10^{-14} \text{ м}$  ( $10^{-4} \text{ Å}$ ), характерной для всякого индивидуального излучающего атома и обусловленной квантовомеханическим соотношением неопределенностей (соответствие конечной ширины уровня и ширины линии конечному времени жизни в возбужденном состоянии). Кроме того, во всех случаях имеется еще намного большее доплеровское уширение линий. Оно обусловлено тем, что излучение в лампах испускается газовым разрядом, при котором излучающие атомы движутся, и в первом приближении сдвиг частоты соответствует отношению  $v/c$ , где  $v$  — скорость излучающего атома относительно направления наблюдения. При этом для каждого атома будет свой сдвиг линии излучения, так как у каждого атома будет и свое значение моментальной скорости относительно наблюдателя. Все эти сдвиги вместе взятые создают доплеровское уширение, пропорциональное  $\sqrt{T/A}$ . Поэтому следовало бы пользоваться «холодными» лампами



с тяжелыми газами. Наконец, в уширение линий дают вклад также газокинетические столкновения излучающих атомов, так как они приводят к фазовым скачкам или прерыванию излучения, что, согласно анализу Фурье, в обоих случаях приводит к уширению. По всем этим причинам требуются специальные усилия при конструировании спектральной лампы, дающей возможно более узкие линии. Из рис. 13 видно существование еще одного эффекта технического происхождения: при большом токе разряда внутренняя часть лампы становится горячей, внешняя же остается холодной. Это приводит к поглощению излучения в холодной боковой зоне, причем появляется более узкая линия поглощения в середине спектра. Этот эффект называется обращением, и его можно избежать, ограничивая ток малыми значениями.

В отношении результатов, к которым стремятся при конструировании новых ламп, сошлемся снова на рис. 8. Чем более узкой является линия, тем больше длина когерентности, а значит, и длина непосредственно измеряемого масштаба.

### 5.3. Стандартная криптоновая лампа

Поиски подходящих источников света привели к обнаружению оранжевого излучения атомов  $^{86}\text{Kr}$ . В природе криптон представлен изотопами с массовыми числами 78 (0,35%), 80 (2,27%), 82 (11,56%), 83 (11,55%), 84 (56,90%) и 86 (17,37%). Используется газообразный криптон, содержащий как минимум

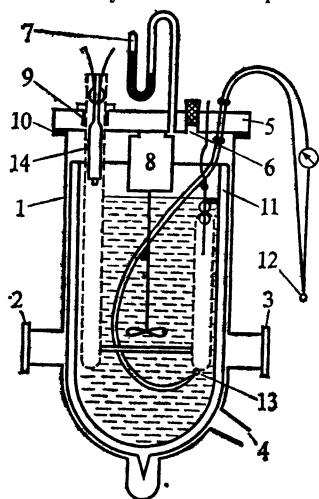


Рис. 14. Лампа с изотопом  $^{86}\text{Kr}$  в криостате [12].

1 — корпус; 2, 3 — окна; 4 — отвод к насосу; 5 — крышка; 6 — отверстие для заливки; 7 — ртутный манометр; 8 — размешиватель; 9, 10 — кольцевые уплотнители; 11 — криптоновая лампа (изотоп  $^{86}\text{Kr}$ ) с нагреваемым катодом; 12, 13 — термоэлементы; 14 — горячий катод.

90%  $^{86}\text{Kr}$  (в разделительной трубке он поддается обогащению до 99,6%). Спин такого дважды четного ядра (четный заряд  $Z=36$  и четное число нейтронов  $N=50$ ) равен нулю, так что у состояний этого атома нет сверхтонкой структуры. На рис. 14 приведена схема лампы, разработанной Энгельгардом. Она полностью погружена в жидкую углекислоту, которая путем снижения давления (откачкой) доведена до температуры тройной точки (63 K). Разряд осуществляется в капилляре, и излучение наблюдается вдоль него. При низкой температуре криптон находится в твердом состоянии, давление газа составляет всего 4 Па ( $=0,03$  торр), так что уширение, обусловленное эффектом Доплера и соударениями, весьма незначительно. В таких условиях длина когерентности достигает 0,8 м, и можно промерять даже масштабы 1 м длины. Через длину волны излучения криптона получено определение:

1 метр равен 1 650 763, 7300 длин волн в вакууме для излучения, соответствующего переходу между уровнями  $5d_3 \rightarrow 2p_{10}$  атомов  $^{86}\text{Kr}$  (термы по Пашену).

Отсюда следует величина длины волны  $\lambda_{Kr} = 6057,80211 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 605,780211 \text{ нм}$ .

Вопреки ожиданиям, выяснилось, что испускаемая этой лампой линия  $^{86}\text{Kr}$  несколько несимметрична [13] по данным измерений с помощью интерферометра Майкельсона. Это приводит к тому, что результаты будут несколько различны при расчетах на основании длины волны максимума линии или длины волны центра тяжести ее профиля.

Поскольку классификация энергетических состояний атома по системе Пашена более не употребительна, мы дадим здесь некоторые разъяснения. Инертные газы неон, аргон и криптон обладают в основном состоянии аналогичными электронными конфигурациями  $\text{Ne} : 2s^2 2p^6$ ,  $\text{Ar} : 3s^2 3p^6$ ,  $\text{Kr} : 4s^2 4p^6$ , что приводит в основном состоянии к заполненным оболочкам с равным нулю полным моментом импульса. Во всех трех случаях состояние обозначается как  $^1S_0$  (синглет- $S$ -нуль). Найти возбужденные состояния проще всего, исходя из однократно ионизованных атомов ( $\text{Ne}^+$ ,  $\text{Ar}^+$ ,  $\text{Kr}^+$ ). В этих конфигурациях *не хватает* электрона (опять в основном состоянии) соответственно в оболочках  $2p$ ,  $3p$  или  $4p$ . Это так называемая однодырочная конфигурация. Можно показать, что она обладает точно таким моментом импульса, как если бы в соответствующей оболочке вообще находился только *один* электрон. Так как спин электрона имеет величину  $1/2\hbar$ , квантовое число момента импульса ионизованной конфигурации равно  $j = l \pm 1/2$ , т. е.  $3/4$  или  $1/2$ , так как для  $p$ -электрона  $l = 1$ . Эти состояния обозначаются  $2P_{3/4}$  и  $2P_{1/2}$ . Итак, если атом ионизуется, то для этого требуется разная величина энергии в зависимости от состояния, в котором остается ион. Энергии ионизации криптона равны 14 эВ для  $^2P_{3/2}$  и 14,66 эВ для  $^2P_{1/2}$ . Таким образом, наряду с основным состоянием нам известны два наиболее высоких уровня в схеме термов криптона (рис. 15). Состояние нейтрального атома получается, если к ионизованной конфигурации вновь добавить один электрон, который можно теперь разместить в любой более высокой оболочке. Так возникают следующие группы термов (рис. 15):

$I^2P_{1/2} + (5s; j = 1/2) \rightarrow 2$  терма с  $J = 0$  и 1 (обозначаются как  $5s'$ ).

$I^2P_{3/2} + (5s; j = 1/2) \rightarrow 2$  терма с  $J = 2$  и 1 (обозначаются как  $5s$ ).

Это дает в общей сложности 4 состояния, до некоторой степени аналогичные состояниям  $^1P_1$ ,  $^3P_0$ ,  $^3P_1$  и  $^3P_2$ , хотя схема связи, положенная в основу этой символики, здесь неприменима. Мы обратимся к этому вопросу позже.

Если, однако, добавить к ионизованной конфигурации один  $5p$ -электрон, то получится 10 состояний:

$II^2P_{1/2} + (5p, j = 3/2, 1/2) \rightarrow 4$  терма с  $J = 2, 1; 1, 0$ .

$II^2P_{3/2} + (5p, j = 3/2, 1/2) \rightarrow 6$  термов с  $J = 3, 2, 1, 0; 2, 1$ .

Эти состояния обозначены на рис. 15 соответственно как  $5p'$  и  $5p$ . Следующие состояния с более высокими энергиями получаются, если дополнить ионную конфигурацию одним  $4d$ -электроном. Тогда получается в общей сложности 12 термов:

$III^2P_{1/2} + (4d, j = 5/2, 3/2) \rightarrow 4$  терма с  $J = 3, 2; 2, 1$ .

$III^2P_{3/2} + (4d, j = 5/2, 3/2) \rightarrow 8$  термов с  $J = 4, 3, 2, 1; 3, 2, 1, 0$ .



модель. В качестве «остова» атома берется ион с моментом импульса  $j_R$ . Взаимодействие вводится таким образом, что сначала связь с орбитальным моментом электрона  $l$  приводит к новому значению полного момента импульса  $K$ :

$$K = j_R + l.$$

Затем сюда добавляется спин электрона ( $s = 1/2$ ):

$$J = K + s.$$

Эта последовательность включения взаимодействия означает, что связь между остовом и орбитальным движением электрона сильнее, чем спин-орбитальное взаимодействие добавленного электрона. Согласно *Рака*, термы обозначаются как  $n l [K]_J$ , так что, например, для группы II имеем

$$5p \left[ \frac{5}{2} \right]_{3,2}, \quad 5p \left[ \frac{3}{2} \right]_{2,1}, \quad 5p \left[ \frac{1}{2} \right]_{1,0}.$$

## 5.4. Практическое измерение метра

Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в работе [14]. Поэтому мы будем обсуждать здесь главным образом одну из установок.

### 5.4.1. Метр-компаратор Кестера [14, 15]

Установка Майкельсона с двумя скрещенными плечами неудобна в обращении. Эта трудность преодолевается путем применения предложенной *Кестером* 60-градусной призмы в качестве делителя луча. Призма состоит из двух сложенных вместе 30-градусных призм с полупрозрачным отражающим слоем (рис. 16). Возможная установка показана на рис. 17. Оптическое устройство на входе (трехпризменный спектрограф 5) дает возможность выбирать нужную спектральную линию (источником служит кадмиевая или криптоновая лампа). Поступающий параллельный пучок света делится на два частичных пучка — правый (верхний) и левый (нижний). Эти пучки проходят далее через две разные части установки. Внутренний пучок проходит через камеры длиной приблизительно 1 м, обозначенные через  $L$ ,  $V$ ,  $L'$  и  $V'$ . Отсеки  $V$  и  $V'$  откачаны, тогда как в  $L$  и  $L'$  поддерживается контролируемое извне давление воздуха (такое же, как и в общей камере). Для этого к патрубку через эластичную мембрану в позиции 17 подключается насос. Эти внутренние части установки служат для непосредственного задания дистанции 1 м, выраженной через число длин волн в вакууме. Внешние же части служат собственно для измерения длины, причем в качестве опорного используется пучок света, отраженный зеркалом 9. С этим пучком интерферируют два пучка света, которые отражаются первый раз передней частью стержня 7, а второй раз —

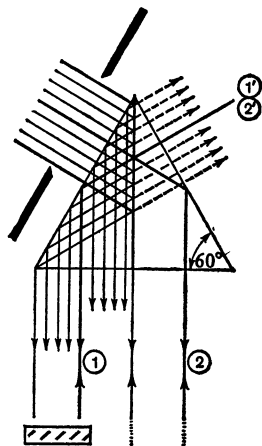


Рис. 16. Пути лучей в призме Кестера.

зеркалом 8. Зеркало 8 притерто к противоположному торцу стержня 7 так, чтобы между ними по возможности не было промежуточного слоя. В зрительную трубу наблюдается картина типа 14. Опорные интерференционные полосы возникают, если зеркало 9 очень слабо наклонено (см. примечание на стр. 27). Системы полос *a* и *c* дает зеркало 8, а система *b* получается при отражении пучка от передней части стержня 7. Установка Кестера используется в основном как компаратор, т. е. она не позволяет определить полную величину длины

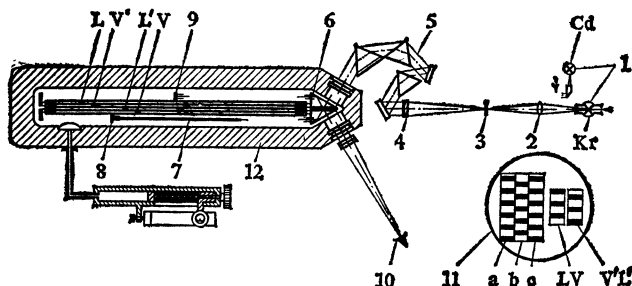


Рис. 17. Метр-компаратор Кестера.

1 — лампа; 2 — линза; 3 — измерительная диафрагма; 4 — коллиматор; 5 — призменный спектральный анализатор; 6 — призма Кестера; 7 — концевая мера длины; 8 — вспомогательная приставная пластина; 9 — плоское зеркало; 10 — изображение измерительной диафрагмы; 11 — вид поля зрения; 12 — футляр измерителя; *L*, *V*, *L'*, *V'* — камеры для компенсации преломления света в воздухе.

путем счета полос. Вместо этого длину можно с точностью 1—2 мкм (т. е. 1000—2000 нм) измерять при помощи обычных оптических средств (измерительного микроскопа). При длине волны  $\lambda=606$  нм это соответствует сдвигу полос на 1—2 длины волны, и задача состоит в том, чтобы определить такой сдвиг возможно точнее. Подробности можно найти в работе Шульце [14]. Следует еще вкратце обсудить весьма хитрую роль устройства 17 для изменения давления. Согласно новому определению метра, речь должна идти о сравнении с длиной волны в вакууме. Однако сравнение проводится без дальнейших усложнений в воздухе. Возникающее различие значительно: хотя коэффициент преломления для воздуха при давлении 1,013 бар (760 торр) равен  $n_{\text{возд}}=1,00027$ , т. е. мало отличается от величины коэффициента преломления света в вакууме, разности оптических путей все же очень велики:  $2 \cdot (n_{\text{возд}} - 1) \cdot 1 \text{ м} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ нм}$ . Если первоначально заполнить камеры *L* и *V* (соответственно *L'* и *V'*; такое дублирование служит лишь для повышения точности, системы полос испытывают суммарный сдвиг) воздухом, а затем эвакуировать *V* (и *V'*), то при откачке воздуха в поле зрения пройдет около 1000 интерференционных полос! Поэтому практически измерение проводится следующим образом. Слабо изменяя давление воздуха (позиция 18 на рис. 17), систему полос *b* сдвигают относительно *a* и *c* так, чтобы эти системы совпали, т. е. разность хода составила целое число длин волн. При этом картины *L**V* и *L'**V'* автоматически также сдвигаются, и этот сдвиг равен вкладу, обусловленному различием коэффициентов преломления для воздуха и для вакуума. Разность сдвига полос непосредственно дает величину разности хода, выраженную в числе длин волн в вакууме, и больше не требуется учитывать никаких характеристик, связанных с воздухом.

Получающаяся степень точности составляет для длины 1 м около 0,01 мкм, т. е. относительная точность равна  $0,01 \cdot 10^{-6}/1 = 10^{-8}$ . Такая точность может быть, однако, достигнута лишь при условии, что температура в объеме всей установки будет одновременно стабилизирована с точностью около 1/1000°C. Поэтому установка монтируется в очень массивном футляре.

### 5.4.2. Метр-компаратор в Сиднее

*Сиддор и Брюс* [16] дали очень подробное описание интерферометра Майкельсона, используемого в Лаборатории Национального бюро стандартов в Сиднее. Интерферометр сконструирован таким образом, что масштабы 1 м длины могут сдвигаться на всю длину, так что в принципе их можно «просчитывать» по всей их длине. При этом указывается, что достигнутая точность составляет  $10^{-9}$  м.

### 5.4.3. Двойной интерферометр Фабри — Перо

В заключение мы рассмотрим еще одну вдвоенную установку Фабри — Перо, чтобы обсудить положенный в ее основу физический принцип. Установка соответствует также комбинации интерферометров Майкельсона и Фабри — Перо (см. стр. 29). В ИФП (см. схему на рис. 9) различают разрешающую способность и область дисперсии. Разность фаз между двумя разделенными лучами равна

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2d \cos \alpha = 4\pi \frac{d}{\lambda} \cos \alpha,$$

разрешающая способность определяется как то минимальное различие длин волн  $\Delta\lambda$ , которое еще можно зарегистрировать при данной длине волны  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{4\pi \sqrt{R}}{1-R} \frac{d}{\lambda},$$

где  $R$  — коэффициент отражения нанесенного методом осаждения из паров отражающего слоя на стеклянной пластине интерферометра, который стремятся как можно сильнее приблизить к 1. Порядок линии интерференции можно обозначить через  $N=2d/\lambda$ . Величина области дисперсии находится из условия, что порядок  $N$  (при длине волны  $\lambda$ ) и порядок  $N+1$  (при длине волны  $\lambda-\delta\lambda$ ) перекрываются:

$$2\pi \frac{2d}{\lambda-\delta\lambda} = 2\pi \frac{2d}{\lambda} + 2\pi,$$

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{2d} \lambda,$$

откуда из выражения для разрешающей способности следует

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{2d} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1-R}{\sqrt{R}}.$$

Отсюда видно, что при увеличении коэффициента отражения сильно растет разрешающая способность и линии становятся все более узкими. *Бенуа, Фабри и Перо* расположили один за дру-

гим два ИФП с довольно точно выдержанными значениями  $d_1 = 6,25$  см и  $d_2 = 12,5$  см. Дистанция  $6,25$  см была подобрана в соответствии с длиной волны  $643,8$  нм излучения кадмия. Точное соответствие дистанции может быть обеспечено изменением величины  $d_1$ . При подключении второго ИФП область дисперсии остается определенной через  $d_1$ , но разрешающая способность теперь определяется величиной  $d_2$ , так что увеличивается вдвое. Собственно говоря, второй ИФП приводит к уменьшению в два раза области дисперсии, но ожидаемая при этом линия подавляется первым ИФП. Это подавление, однако, не является полным, так что, изменяя  $d_2$ , можно добиться того, чтобы подавленная линия попала точно в центр области дисперсии первого ИФП, и тогда будет выполнено равенство  $d_2 = 2d_1$ . Эта процедура может быть продолжена, так что получится эталон для дистанции  $25$  см и, наконец,  $50$  см.

### 5.5. Применение лазеров как стандартов длины волны

Разработка лазеров открыла новые возможности для реализации стандартов длины. При этом обеспечиваются два преимущества:

1. Длина когерентности для излучения лазера намного больше ( $\approx 10^4$  м), чем для света криптоновой ( $^{86}\text{Kr}$ ) лампы ( $\approx 0,8$  м). Поэтому становятся возможными промеры длины объектов, превышающих  $1$  м.

2. Большая интенсивность лазера как источника света делает возможным фотоэлектрический счет интерференционных полос. Однако для того, чтобы лазер мог быть использован в качестве стандарта длины волны, необходимо предварительно добиться высокой стабильности длины волны излучения ( $\Delta\lambda \approx 10^{-10} \lambda$ ).

Мы будем рассматривать здесь в основном гелий-неоновый лазер. Он может работать на трех длинах волн:  $632,8$  нм ( $3s_2 \rightarrow 2p_4$ , красная линия в видимой части спектра),  $1153$  нм ( $2s_2 \rightarrow 2p_4$ ) и  $3390$  нм ( $3s_2 \rightarrow 3p_4$ ). Обозначение термов здесь опять дается по Пашену (см. стр. 34):  $3s_2$  обозначает  $5s$ -электрон,  $2p_4$ — $3p$ -электрон, добавленный к оболочке  $\text{Ne}^+$ . Схема термов гелий-неонового лазера приведена на рис. 18. Красной линии, которую мы будем здесь обсуждать, сейчас приписывается длина волны в вакууме  $\lambda = 632,9914$  нм. В лазерной технике расчеты проводятся на языке как длины волны, так и частоты, поскольку там применяются экспериментальные методы техники СВЧ. Поэтому мы будем здесь пользоваться наряду с длиной волны также частотой.

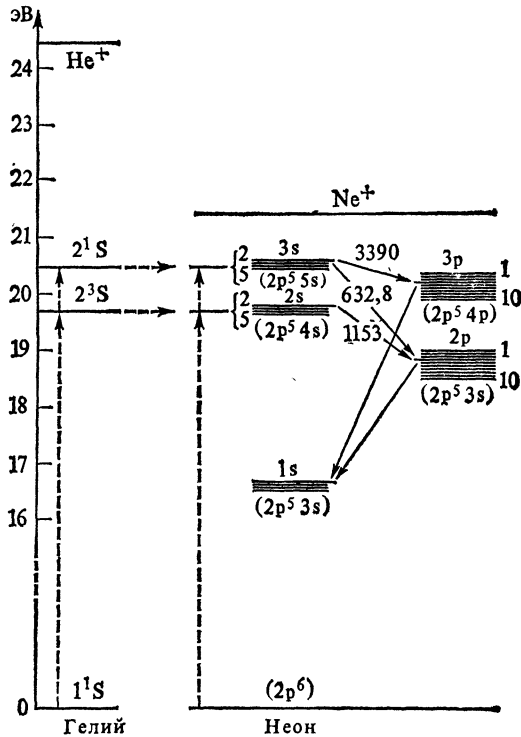


Рис. 18. Схемы термов атомов гелия и неона.

Изображены три перехода для лазера. Длины волн даны в нанометрах. По оси ординат отложена энергия возбуждения в эВ.

Это поставит перед нами некоторые фундаментальные вопросы, которые мы рассмотрим в разд. 5.6.

Частота излучения лазера в красной линии неона равна  $\nu \approx 5 \cdot 10^{14}$  Гц = 500 ТГц ( $\nu = c/\lambda$ ). Частота колебаний определяется резонатором со встроенной газоразрядной трубкой [17]. (Установка аналогична интерферометру Фабри — Перо.) Частоты собственных колебаний такого резонатора суть

$$\nu_n = n \frac{c}{2L},$$

где  $c$  — скорость света,  $L$  — длина резонатора. При  $L = 1$  м получим  $c/2L = 150$  МГц. Чтобы получить  $\nu_n \approx 500$  ТГц, нужно взять  $n = 3,33 \cdot 10^6$ . Таким образом, порядок так называемой *моды колебаний* очень высок. Однако частота резонатора, вообще говоря, никогда в точности не совпадает с частотой перехода для Ne. Это в конце концов и необязательно, так как испускаемое излу-



чение находится в интенсивном взаимодействии с газом лазера, для которого имеет место значительное доплеровское уширение линии (см. стр. 31). Рассмотрим в качестве примера форму линии на рис. 12 и рассчитаем с ее помощью величину доплеровского уширения (приведенные там данные для кадмия справедливы по порядку величины и здесь). Для  $\Delta(1/\lambda)=5 \text{ м}^{-1}$  получим

$$\Delta\nu=c\cdot\Delta(1/\lambda)=1500 \text{ МГц.}$$

Таким образом, доплеровское уширение в газе велико по сравнению с разностями частот собственных колебаний резонатора. Поэтому лазер может излучать в целом ряде мод в рамках доплеровской ширины линии, и эти колебательные частоты намного уже, чем доплеровская ширина. Частоты резонатора также обратно пропорциональны  $L$ , и любое изменение  $L$  приводит, таким образом, к сдвигу частоты колебаний, ибо

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta L}{L}.$$

Уже просто температурное изменение длины  $L$  может быть слишком большим. Возьмем, например,  $L=1 \text{ м}$ ; коэффициент теплового расширения для кварца равен  $\alpha=5\cdot 10^{-7} \text{ К}^{-1}$ . Мы получим тогда при изменении температуры на  $0,1 \text{ К}$  изменение длины  $\Delta L=5\cdot 10^{-8} \text{ м}$  ( $=50 \text{ нм}$ ), так что

$$|\Delta\nu|=5\cdot 10^{14} \text{ Гц } 5\cdot 10^{-8}=25 \text{ МГц.}$$

Такое изменение частоты для лазера обычно. Чтобы получить источник света, существенно лучший, чем криптоновая лампа, необходимо добиться намного большей стабильности частоты излучения лазера.

Такая стабилизация достигается, если есть возможность проводить сравнение излучения лазера с другой очень узкой линией излучения. Для этого удобны молекулярные линии поглощения. Линии неона с длиной волны  $632,8 \text{ нм}$  достаточно точно соответствует, например, линия поглощения молекулы  $J_2$ . Метод этой очень тонкой стабилизации можно понять, исходя из следующих представлений. Пусть на *первом этапе* лазер излучает лишь в одной моде, лежащей где-то внутри доплеровского распределения неона в лампе. Путем настройки лазера, состоящей в правильной установке длины резонатора, можно установить резонансную частоту в центре доплеровского распределения. Затем в этом положении достигают насыщения излучения, называемого *лэмбовским провалом* (который также можно использовать для стабилизации, хотя лучше взять молекулярную линию). *Второй этап* состоит в том, что между газоразрядной трубкой лазера и зеркальными отражателями резонатора располагают газопо-

глутительный элемент, заполненный парами иода. Поглощение «приходящей» волны выравнивает числа заполнения двух интересующих нас уровней (основного и возбужденного состояний молекулы), вследствие чего «уходящая» волна оказывается уже не ослабленной, напротив, в результате создания индуцированного излучения достигается весьма интенсивное испускание линии молекулы  $J_2$ . В излучении лазера присутствует, таким образом, широкий фон с лэмбовским провалом, а на нем предельно узкая линия молекулы  $J_2$ , извлеченная из спектра с помощью хитроумной комбинации вспомогательных электронных средств. Используя колебания максимальной интенсивности этой линии, вновь так подгоняют (с помощью пьезоэлектрических элементов) длину резонатора, чтобы была достигнута наибольшая интенсивность <sup>1</sup>). С помощью такого стабилизированного лазерного источника излучения К. Э. Джиллиленд, Г. Д. Кук, К. Д. Милени и Р. Б. Стивенс [19] сконструировали интерферометр. Стабилизированные лазерные источники излучения были также развиты Физико-техническим управлением ФРГ [20]. Получена столь узкая линия излучения, что необходим учет даже влияния изотопов. Например, для гелий-неонового лазера ( $^3\text{He}$  —  $^{23}\text{Ne}$ ) при стабилизации с помощью паров молекул  $^{129}\text{J}_2$  получены следующие результаты [20, 21]:

$$\lambda_{\text{вак}} = 632,990076 \text{ нм},$$

$$\Delta\lambda = \pm 2 \cdot 10^{-9} \lambda_{\text{вак}}$$

( $\Delta\lambda$  — стандартное отклонение от среднего значения, см. приложение I). Такая «ширина погрешности» приводит к разбросу частот  $\Delta\nu = 2 \cdot 10^{-9} \nu = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 500 \cdot 10^{12} = 10^6 \text{ Гц} = 1 \text{ МГц}$ , что, таким образом, существенно меньше, чем известные до этого разбросы частот. Следует отметить, что в другом случае стабилизированного лазерного излучения уже измерен разброс частот всего в 150 кГц, а сама линия могла быть воспроизведена с точностью до 1 кГц. Поэтому можно думать, что в будущем стандарты длины волны будут основываться на стабилизированных лазерах, если только развитие техники вообще не пойдет по иному направлению, о чем будет сказано в следующем разделе. Предварительно следует лишь заметить, что в методе стабилизированного лазера в качестве стандарта выбирается, собственно говоря, линия излучения молекулы, а гелий-неоновый лазер обеспечивает только большую интенсивность излучения.

---

<sup>1</sup>) Изложение методов лазерной спектроскопии можно найти в прекрасной обзорной статье Фелда и Летохова [18].

## 5.6. Перспективы развития

В 1972 г. в США были опубликованы две работы [23, 24], в которых сообщалось о непосредственных измерениях оптических частот и их приложении к реализации стандарта времени (см. разд. 6). Согласно измерениям *Бэя и сотр.* [23], частота линии 632,8 нм гелий-неонового лазера, стабилизированного по *лэмбовскому провалу*, равна  $\nu = 473\,612\,166 \pm 29$  МГц. При измерениях, проводившихся *Ивенсоном и сотр.* [24], использовалась линия 3,39 мкм в инфракрасном диапазоне, стабилизированная линией молекулы  $\text{CN}_4$ , и ее частота была непосредственно определена как

$$\nu = 88\,376\,181,627 \text{ МГц} \pm 50 \text{ кГц.}$$

Относительные погрешности составили  $6 \cdot 10^{-8}$  и  $6,25 \cdot 10^{-10}$ . Эти частоты были, таким образом, с очень большой степенью точности измерены в оптическом диапазоне, что представляет собой заметный успех в развитии техники измерений. С другой стороны, удалось также, пользуясь в качестве стандарта длины волны криптоновой лампой, измерить длины волн этих линий лазеров и получить соответственно  $632,99147 \text{ нм} \pm 1 \cdot 10^{-5} \text{ нм}$  и  $3,392231376 \text{ мкм}$  (при  $\Delta\lambda/\lambda = \pm 3,5 \cdot 10^{-9}$ ). Произведение длины волны на частоту должно давать величину скорости света. При этом получается

$$c = 299\,792,462 \pm 0,018 \text{ км/с или соответственно}$$

$$c = 299\,791,4562 \pm 0,0011 \text{ км/с.}$$

Лучшее из известных прежде значений [25, 26] равнялось

$$c = 299\,791,50 \pm 0,1 \text{ км/с,}$$

и мы видим, что его погрешность на два порядка величины превышает погрешность при оптических измерениях скорости света. Анализ погрешностей при этом показывает, что главный их источник — это невозможность улучшения реализации линии криптона. Поэтому было предложено [27, 28] вообще отказаться от стандарта длины и *определить* вместо этого скорость света как мировую постоянную ( $c = 299\,792,458 \text{ км/с}$ )<sup>1)</sup>. Тогда отсюда следует определение длины, если измеряется частота, и при этом стандарт длины волны подвержен меньшей погрешности, соответствующей измерению частоты. Было бы любопытно знать, к чему нас еще приведет при этом дальнейшее повышение точности при измерениях частоты.

---

<sup>1)</sup> Рекомендация XV Генеральной конференции 1975 г.

## 6 Реализация единицы времени

Единицы длины (разд. 5) и массы (разд. 7) поддаются овеществлению вне зависимости от того, удастся ли нам присоединить к ним неизменную меру. Можно вновь и вновь сравнивать масштабы с эталоном, находящимся в надежном хранилище. В отношении времени дело обстоит совершенно иначе. С одной стороны, единица времени не поддается хранению — время бежит безостановочно, с другой же стороны, требуется, чтобы при измерениях можно было проводить количественное сравнение с прошедшими отрезками времени. Очень большие отрезки времени используются прежде всего в астрономии, тогда как в обыденной жизни необходимы намного меньшие интервалы. Наконец, при естественнонаучных исследованиях представляют интерес крайне малые интервалы времени.

В теории время  $t$  представляет собой непрерывно изменяющуюся независимую переменную, фигурирующую в аксиомах Ньютона ( $m\ddot{x}=F$ , где  $F$  — действующая сила,  $\ddot{x}=d^2x/dt^2$  — обусловленное этой силой ускорение массы  $m$ ). Во всех процессах, связанных с движением, время играет роль существенного параметра: записав  $x=x(t)$ , мы имеем в виду, что процесс известен нам полностью во все моменты времени. Всякий промер времени означает установление равномерно следующих одна за другой меток, поддающихся счету. Расстояние между двумя такими метками во времени может быть выбрано в качестве единицы времени. Если действие песочных часов свидетельствует о течении времени, то их последовательное переворачивание устанавливает цепочку меток во времени. Лишь течение созвездий демонстрирует нам безостановочное и не требующее постоянного подталкивания (периодическое) движение, и в принципе требуется выбрать шкалу времени, которая правильно описывала бы такое движение при выполнении законов механики, в частности закона тяготения. Первоочередной задачей является вывод равномерной шкалы времени, причем она должна поддаваться промеру с помощью земных методов. До сих пор не возникало сомнений в том, что задача отыскания и определения такой шкалы имеет смысл. При все большем усовершенствовании методов наблюдения движений звезд варианты эмпирической шкалы времени подвергались в известном смысле корректировке. При этом конструировались все более совершенные часы (кварцевые и атомные), которые позволяют реализовать в лабораторных условиях основную единицу — секунду, и это делается со столь

высокой точностью, что не возникает никаких трудностей при распространении измерений на большие интервалы времени в астрономии. Официально принятая единица времени установлена на базе методов атомной физики. В дальнейшем мы, однако, будем говорить также и об астрономическом определении этой единицы ввиду ее большого практического значения в астрономии. Нет сомнений в совершенно исключительном значении определения единицы времени, основывающемся на атомной физике, если иметь в виду необходимость перехода к определению скорости света как мировой постоянной и сведению, таким образом, измерения длины к измерению времени, о чем уже говорилось в разд. 5.

### 6.1. Старые определения

Все старые определения шкалы времени основывались на видимом движении звезд по небу. Первым наблюдательным фактом, позволяющем делать временные метки, была, естественно, смена дня и ночи. Первоначально продолжительность дня от восхода до захода Солнца разбивалась на 12 часов, длительность которых, однако, зависела от времени года и была поэтому сама периодической функцией времени. Неизвестно, откуда происходит деление одного часа на 60 минут, но установлено, что в XV столетии астрономы уже определяли секунду как  $\frac{1}{60}$  минуты.

Астрономическая шкала времени в основном определяется двумя движениями — вращением Земли вокруг ее собственной оси (север — юг) и обращением Земли вокруг Солнца по слегка эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится Солнце (рис. 19). Собственная ось вращения Земли наклонена примерно на  $23,5^\circ$  к нормали плоскости орбиты (рис. 20; картина в плоскости эклиптики). Мы будем обсуждать астрономическое определение времени лишь в геоцентрической системе (см. [29]), опираясь на построения, показанные на рис. 21 и 22. Земная ось ориентируется по вертикали, а вокруг Земли строится сфера (так называемая небесная сфера). Тогда видимый путь Солнца, спроецированный на эту сферу, изображается как окружность большого круга. Она пересекает проекцию земного экватора на небесную сферу (так называемый небесный экватор) в двух точках — точке весеннего равноденствия  $\gamma$  и точке осеннего равноденствия  $\gamma'$ .

Свое собственное положение на Земле задают как место установки инструмента для наблюдений Солнца (по значениям географических долготы и широты). Направление вращения Земли положительное (в математическом смысле); таково же и движение Солнца. Интервал между двумя последовательными прохождением-

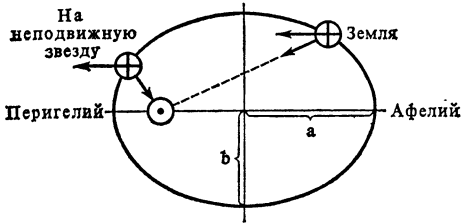


Рис. 19. Орбита Земли вокруг Солнца в плане.

$a \approx 149,6 \cdot 10^6$  км,  $a-b=2 \cdot 10^{-4}a$ ,  $e=\sqrt{1-b^2/a^2}=0,02$ .

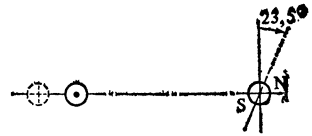


Рис. 20. Вид в плоскости орбиты Земли и ориентация оси собственного вращения Земли.

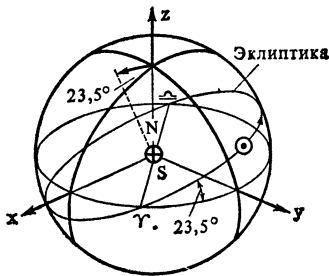


Рис. 21. Земля и проекция эклиптики на небесную сферу.

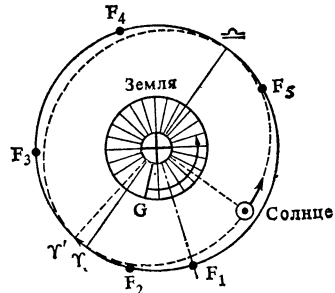


Рис. 22. Вид сверху на небесный экватор.

Через  $G$  обозначен меридиан Гринвича. Путь Солнца вследствие наклона плоскости эклиптики изображается в виде эллипса. Расположение гипотетических неподвижных звезд обозначено через  $F_i$ .

ми Солнца через меридиан наблюдателя на Земле определяет продолжительность *истинного солнечного дня*. Так как солнечное время в силу международного соглашения всегда совпадает с солнечным временем для наблюдателя, находящегося на меридиане Гринвича, мы будем в дальнейшем всегда считать, что наблюдатель находится на этом меридиане. Непрерывное сравнение на протяжении года (сравнение с часами!) показывает, что продолжительность истинных солнечных суток не постоянна, а все время колеблется (рис. 23). Это обусловлено двумя причинами. *Во-первых*, из закона тяготения (в форме закона площадей Кеплера) следует, что в перигелии Земля движется быстрее, чем в афелии. Так получается разница в длительности суток в июне и декабре, составляющая около 16 с. *Во-вторых*, продолжительность суток, как правило, определяется по полному обороту небесной сферы вдоль экватора. За год происходит сдвиг на  $360^\circ$ ; летом и зимой экватор и эклиптика «параллельны» друг другу,

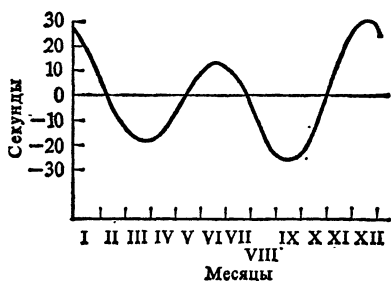


Рис. 23. Изменение продолжительности истинных солнечных суток на протяжении одного года.

так что изменение угла вдоль эклиптики совпадает с изменением угла вдоль экватора, а вблизи весенней и осенней точек равноденствия изменение угла вдоль экватора происходит медленнее, чем вдоль эклиптики. Отсюда следует различие длительностей суток между весной и летом (осенью и зимой) приблизительно на 20 с. Этими факторами обусловлен ход кривой на рис. 23. Отсюда выводится продолжительность *средних солнечных суток*, и эти сутки разбиваются на  $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$  с. Если бы вместо этого 86 400 с насчитывали в истинных солнечных сутках, то пришлось бы определить переменную единицу времени, что совершенно нежелательно. Разницу между истинным и средним солнечным временем называют *уравнением времени*:

Уравнение времени = истинное солнечное время минус среднее солнечное время.

Эта величина и отложена по оси ординат на рис. 23<sup>1)</sup>.

Из рис. 19 видно, что наблюдения Солнца непосредственно дают не истинное «число оборотов» Земли вокруг ее оси, так как ввиду движения Земли вокруг Солнца всегда измеряется более продолжительный интервал времени, чем тот, который соответствует одному обороту Земли около оси. Поэтому, если наблюдать неподвижную звезду (горизонтальная стрелка на рис. 19), можно измерять *звездные сутки*. На протяжении одного года наблюдается  $n$  солнечных суток и  $n+1$  звездных суток. Число суток в году равно приблизительно 360, так что разница в продолжительности солнечных и звездных суток составляет круглым счетом  $24 \cdot 60 \text{ мин} / 360 \text{ сут} = 4 \text{ мин/сут}$ .

Если бы скорость вращения Земли была строго постоянной и находилась в целочисленном отношении к ее скорости обращения по орбите около Солнца, то определение средних солнечных суток приводило бы одновременно к определению единицы времени — секунды. Это, однако, не так. Необходимо принимать

<sup>1)</sup> Ср. Астрономический календарь (постоянная часть). Изд. 6-е. — М.: Наука, стр. 17—22, 1973. — *Прим. перев.*

во внимание, что при определении количества дней в году должны учитываться времена года. При этом снова можно опираться на наблюдения Солнца или звезд; получается следующее определение года.

1. *Тропический год*. Из наблюдения продолжительности суток или высоты Солнца над горизонтом видно, что на протяжении года продолжительность суток изменяется. Определение числа средних солнечных суток, прошедших от одного весеннего равноденствия до другого, т. е. между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия (рис. 22), дает продолжительность *тропического года*. Продолжительность среднего тропического года равна

$$1 \text{ год}_{\text{троп}} = 365,24220 \text{ средн. солн. сут.}$$

Она превышает 365 дней примерно на  $\frac{1}{4}$  сут. Поэтому каждые 4 года добавляется один день (високосный год). Чтобы правильно учитывались следующие десятичные знаки, первый год столетия не считается високосным. Кроме того, 1972 г. был специально удлинен — кроме добавочного (високосного) дня, в него включили 2 дополнительные секунды (по одной секунде добавили также 1 января 1973 г. и 1 января 1974 г.).

Необходимость введения *среднего* тропического года основывается на том, что нужно учитывать малые колебания его продолжительности. Земля не является совершенно жесткой, и к тому же она не шарообразна, а сплюснута к экватору. Было обнаружено существование широтных колебаний, т. е. малый наклон оси фигуры Земли по отношению к постоянной оси вращения; кроме того, имеет место явление нутации. И то и другое приводит к малым колебаниям положения экватора Земли. Но так как пересечения эклиптики и небесного экватора определяют точки весеннего и осеннего равноденствий, то и эти точки также совершают малые колебательные движения.

2. *Сидерический год* — это тот промежуток времени, через который Земля при своем движении вокруг Солнца возвращается в прежнее положение относительно неподвижных звезд. Этот промежуток также выражается через положение точки весеннего равноденствия относительно какой-либо неподвижной звезды плюс угловое расстояние меридиана относительно точки весеннего равноденствия (рис. 22). На основании таких наблюдений было обнаружено, что и сама точка весеннего равноденствия медленно передвигается с периодом 25 725 лет в направлении, противоположном движению Земли по орбите вокруг Солнца (обратное движение). Таким образом, по сравнению с тропическим годом сидерический немного длиннее, а именно:

$$\frac{365 \text{ дней}}{26\,000} = 0,014 \text{ сут.}$$



Соответственно

$1 \text{ год}_{\text{сидерич}} = 365,25636 \text{ средн. солн. сут.}$

Движение точки весеннего равноденствия представляет собой прецессию земной оси вокруг некоторой неподвижной оси под влиянием момента силы притяжения со стороны Солнца и Луны на геонид, находящийся в наклонном положении<sup>1)</sup>. Явное свидетельство о существовании типичного прецессионного (как и нутационного) движения следует из наблюдений орбиты Луны<sup>2)</sup>. Луна при своем движении постоянно испытывает малые ускорения или замедления, которые в конечном счете можно объяснить лишь малыми колебаниями земной оси (т. е. самого наблюдателя).

3. *Аномалистический год* представляет собой промежуток времени между двумя последовательными прохождением Земли через перигелий. Отличие от двух предыдущих определений года заключается в том, что ориентация эллипса орбиты Земли в пространстве не постоянна.

$1 \text{ год}_{\text{аномалистич}} = 365,25946 \text{ средн. солн. сут.}$

Увеличение точности часов в ходе их усовершенствования (сначала маятниковых, а затем кварцевых часов) в конце концов выявило тот факт, что средние солнечные сутки не являются в достаточной степени постоянными, но их продолжительность увеличивается на протяжении столетий, т. е. Земля вращается все медленнее. Речь идет о чрезвычайно малом, но поддающемся измерению эффекте, в основном обусловленном трением, которое действует при приливных движениях. Продолжительность суток увеличивается в результате на 0,0016 с в столетие, т. е. приблизительно на  $5 \cdot 10^{-8}$  с в день.

## 6.2. Астрономическое определение единицы времени—эфемеридная секунда

Из рис. 22 видно, что можно переходить от одной системы счета времени к другой, если известен характер различных относительных движений. Мы начнем с сидерической (звездной)

<sup>1)</sup> См., например, книгу Струве [29], а также работу Юнга [30]. Орбита Луны наклонена по отношению к эклиптике всего на  $5^\circ$  (радиус орбиты равен 384 000 км).

<sup>2)</sup> В астрономии в отличие от теории волчка в механике под прецессией понимают медленную (секулярную, вековую), а под нутацией — более быструю периодическую составляющие прецессионного движения.

шкалы времени <sup>1)</sup>. Если исходить из ежесуточного прохождения гринвичского меридиана через точку весеннего равноденствия <sup>2)</sup>, то получим определение звездного гринвичского времени. Оно следует из наблюдения прохождения звезды через меридиан (что в одну ночь можно наблюдать для многих звезд!), так как движение точки весеннего равноденствия известно. Однако такая сидерическая шкала времени неудобна, так как она не приурочена к движению Солнца, например, сидерические сутки приблизительно на 4 мин короче, чем средние солнечные сутки (стр. 47). В связи с этим можно указать два выхода — либо перейти от точки весеннего равноденствия к меридиану Солнца (вводится равномерно движущееся по небесной сфере «среднее Солнце») и получить таким образом шкалу времени, основанную на длительности суток (средние солнечные сутки), либо опираться не на меридиан Гринвича, а рассматривать прохождение Солнца через точку весеннего равноденствия и получить тем самым шкалу времени, основывающуюся на продолжительности года. Первый подход приводит к так называемому «мировому времени» (его варианты —  $UT_0$ ,  $UT_1$  и  $UT_2$ ,  $UT$  — Universal Time), а второй подход — к эфемеридному времени.

Для этого требуется прежде всего знать параметры движения Солнца. На основании обработки наблюдений Солнца на протяжении столетий *С. Ньюком* в конце прошлого века выразил долготу Солнца на эклиптике как

$$L_s = L_0 + L_1\tau + L_2\tau^2 + L_3.$$

В то время еще считалось, что Земля вращается равномерно, и поэтому переменная  $\tau$  задавалась как <sup>3)</sup>

$$\tau = \frac{\text{Время}}{32\,525,000 \text{ сут}},$$

где 32 525 сут представляет собой продолжительность юлианского столетия. Это соотношение следует, конечно, рассматривать как приближенную формулу, где  $L_1$  является в сущности скоростью движения Солнца,  $L_0$  — начальным значением координаты (она определена для формулы Ньюкома весьма точно),  $L_2$  — поправочный член, а  $L_3$  — сумма малых периодических поправок. Так как долгота  $L_s$  берется по эклиптике, то прямое восхождение

<sup>1)</sup> В дальнейшем мы будем следовать главным образом статье Ковалевского [31]. Ряд вопросов освещен также в работе Штилле [32].

<sup>2)</sup> При этом пренебрегают малым движением точки весеннего равноденствия.

<sup>3)</sup> При этом всегда выбирают переменную  $\tau$  безразмерной, так что постоянные  $L_0$ ,  $L_1$  и  $L_2$  имеют размерность угла.

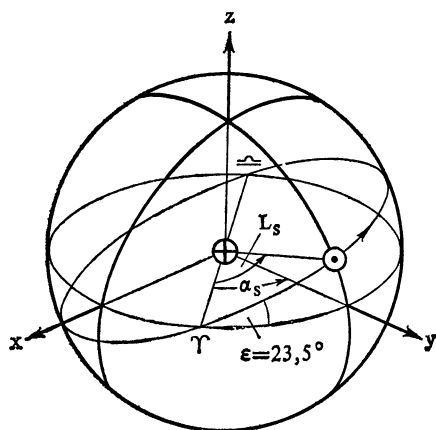


Рис. 24. Долгота среднего Солнца, отнесенная к эклиптике ( $L_s$ ) и к небесному экватору ( $\alpha_s$ ).

ние <sup>1)</sup>  $\alpha_s$  должно несколько отличаться от  $L_s$  (числовые значения, см. на стр. 51). Если  $\epsilon$  — угол наклона эклиптики (рис. 24), то  $\operatorname{tg} \alpha_s = \cos \epsilon \operatorname{tg} L_s$

и для  $\alpha_s$  также выполняется аналогичное квадратное уравнение  $\alpha_s = A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3$ .

Для меридиана Гринвича сидерическое время дается в тех же единицах, как

$$T = T_0 + T_1\tau + T_2\tau^2 + T_3,$$

где теперь  $T_1$  — скорость вращения Земли в предположении его равномерности. Гринвичское солнечное время равно разности  $T$  и  $\alpha_s$ :

$$t = (T_0 - A_0) + (T_1 - A_1)\tau + (T_2 - A_2)\tau^2 + (T_3 - A_3),$$

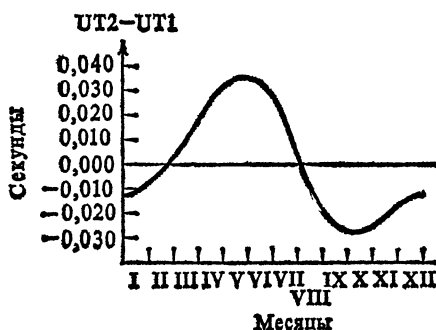
а среднее гринвичское солнечное время равно

$$t_G = (T_0 - A_0) + (T_1 - A_1)\tau$$

(остальные члены представляют собой поправки). Мировое время равно  $UT0 = t_G + 12$  ч (ввиду различного начала отсчета суток). Время  $UT1$  есть исправленное время. В нем учтены поправки на малые движения полюса, приводящие к тому, что долготы и широты мест наблюдения на Земле претерпевают малые изменения (около  $0,1''$ , что соответствует движению полюса в радиусе

<sup>1)</sup> Положение неподвижных звезд определяется их долготами и широтами долготой (прямым восхождением) является угловое расстояние меридиана звезды от меридиана точки весеннего равноденствия, а широтой (склонением) — угловое расстояние от небесного экватора.

Рис. 25. Отклонение шкалы времени  $UT1$  от шкалы  $UT2$ .



нескольких метров!). Наконец, производится поправка и на сезонное движение (ввиду таяния полярных шапок), что дает  $UT2$ . Эта последняя поправка даже меньше 0,1 с (рис. 25). Сигналы времени, посылаемые радиостанциями, соответствуют  $UT2$ . Оказывается, что и эта шкала времени еще не обладает однородностью, достаточной для научных целей. Поэтому в конце концов был произведен переход ко второму методу определения времени, а именно по шкале, основывающейся на продолжительности года.

По этой шкале определяется *эфемеридное время*. Под эфемеридой понимают расчет геоцентрических координат небесного тела, основанный на элементах орбиты. В свою очередь элементами орбиты в астрономии являются 6 интегралов движения, следующие из анализа движения Земли вокруг Солнца как невозмущенной задачи двух тел. Исходя из этих элементов орбиты, которые задаются действием тяготения, и при известных начальных данных можно вычислить положение небесного тела в любой момент времени; напротив, можно по этим координатам определить соответствующий им момент времени. Так определяют время, измеряя координаты Солнца и производя расчет эфемерид. Однако мы еще не учли при описании данного метода, что на видимое движение Солнца воздействует целый ряд возмущений (со стороны планет, изменения вращения Земли и т. д.). В результате эфемеридное время отличается от среднего солнечного времени более чем на 30 секунд (рис. 26).

Вновь примем за отправной пункт надежно установленную формулу *Ньюкома*

$$L_s = 279^{\circ}41'48,04'' + 129602\,768,13'' \frac{t_e}{36\,525 \text{ сут}} + 1,089'' \left( \frac{t_e}{36\,525 \text{ сут}} \right)^2.$$

При этом начальным моментом  $t_e=0$  является 31 декабря 1899 г., 12 ч  $UT \equiv 0$ -е января 1900 г., 12 ч  $ET$  ( $ET$  — эфемеридное время). Пусть поправки отброшены и введена средняя координата  $L_m$ .

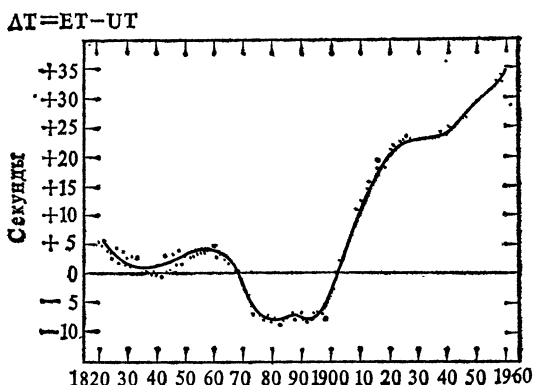


Рис. 26. Отклонение эфемеридного времени от среднего солнечного.

*Тропический год* продолжительностью  $D$  мы определим, как и прежде, следующим образом: это срок, в течение которого  $L_s$  получает приращение на  $360^\circ$ , или  $129\,600''$  (угловых секунд). Итак,

$$L_s(t_e + D) - L_s(t_e) = 129\,600''.$$

Если записать это равенство полностью, получим

$$129\,602\,768,13'' \frac{D}{36\,525 \text{ сут}} + 2,178'' \frac{D \cdot t_e}{(36\,525 \text{ сут})^2} + 1,089'' \frac{D^2}{(36\,525 \text{ сут})^2} = 129\,600''.$$

Как видно, величина  $D$  зависит от выбора момента  $t_e$ , с которого начинается измерение продолжительности года, т. е. от выбора начала отсчета. Поэтому используют другой метод. Скорость вращательного движения (угловая скорость) равна

$$\frac{dL_m}{dt/36\,525 \text{ сут}} = 129\,602\,768,13'' + 2,178'' \frac{t_e}{36\,525 \text{ сут}}.$$

На протяжении года она изменяется лишь немного, и поэтому при определении тропического года принимают

$$\left( 129\,602\,768,13'' + 2,178'' \frac{t_e}{36\,525 \text{ сут}} \right) \frac{D}{36\,525 \text{ сут}} = 129\,600''$$

или

$$\frac{D}{36\,525 \text{ сут}} = \frac{129\,600''}{129\,602\,768,13' + 2,178'' \frac{t_e}{36\,525 \text{ сут}}}.$$

При этом эфемеридная секунда представляет собой  $1/86\,400$  часть эфемеридных суток, или  $1/3155760000$  часть юлианского

эфемеридного столетия. Однако *эфемеридная секунда* будет окончательно определена лишь в случае, когда мы еще положим  $t_e = 0$ . Соответствующая продолжительность тропического года равна  $D_0$ . Итак, мы имеем

$$D_0 = \frac{129\,600 \cdot 31\,557\,600\,000 \text{ с}}{129\,602\,768,13} = 31\,556\,925,9747 \text{ с},$$

и принятое Международным комитетом мер и весов в 1956 г. *определение эфемеридной секунды* гласило:

$$1 \text{ секунда} = \frac{1}{31\,556\,925,9747} \text{ (тропич. год 1900, 0 янв. 12 час ET).}$$

В этом определении удалось обойти трудность, связанную с неоднородностью шкалы времени  $UT$ : единица времени 1 с связана с определенным моментом времени. Неудобство состоит в том, что эфемеридное время всегда определяется лишь задним числом из астрономических наблюдений. Мы не можем здесь подробнее углубляться в этот вопрос, однако необходимо еще указать на то, что такая шкала времени поддается проверке с помощью самых разнообразных астрономических объектов. Особую роль играет при этом наблюдение Луны ввиду ее большой скорости обращения. Относительная точность измерения эфемеридного времени сейчас принимается равной  $10^{-8}$ .

### 6.3. Определение и реализация единицы времени средствами атомной физики

Сложное задание времени как эфемеридного времени неприемлемо в обыденной жизни, и требуется более быстрый способ определять время. Для этого необходимы часы, определяющие интервалы времени с относительной точностью хотя бы  $10^{-8}$ . XII Генеральная конференция по мерам и весам уполномочила в 1964 г. Международный комитет по мерам и весам установить некоторую молекулярную или атомную частоту, которая с 1967 г. должна служить официально принятым стандартом:

*Квантовый переход между линиями сверхтонкой структуры атома  $^{133}\text{Cs}$ , а именно невозмущенный переход  $F=4, m_F=0 \rightarrow F=3, m_F=0$  основного состояния  $^2S_{1/2}$ , дает точно частоту  $9,192631770 \text{ ГГц}$ .*

Определяемая тем самым единица времени — 1 секунда — равна продолжительности  $9,192631770 \cdot 10^9$  колебаний излучения при



Опираясь на основное состояние, мы получаем определение секунды, не требующее учета тонкой структуры. Оба состояния, с помощью которых дается определение секунды, возникают в результате дополнительного взаимодействия, не отраженного схемой на рис. 27. Речь идет о магнитном взаимодействии между моментами электронной оболочки и ядра атома. Магнитный момент ядра атома  $^{133}\text{Cs}$  отличен от нуля, но ядерный магнитный момент всегда в 2000 раз меньше, чем момент электронной оболочки. Поэтому дополнительное расщепление термина очень мало по сравнению с эффектом тонкой структуры и называется *сверхтонкой структурой* уровня. Соответственно этому новому взаимодействию введено и новое обозначение для полного момента импульса, аналогичное принятому для электронных оболочек. Если  $\mathbf{I}$  — спин ядра, а  $\mathbf{J}$  — полный момент импульса электронной оболочки, то полный момент импульса всего атома  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$  в классической теории должен быть постоянным, так как взаимодействие обусловлено внутренними силами. Такой полный момент квантуется, а его абсолютное значение равно  $|\mathbf{F}| = \sqrt{F(F+1)} \hbar$ , что соответствует последовательности квантовых чисел

$$|I - J| \leq F \leq I + J.$$

Ядро  $^{133}\text{Cs}$  обладает спином  $7/2 \hbar$  ( $I = 7/2$ ). Так как  $J = 1/2$ , то могут реализоваться квантовые числа полного момента атома, равные 3 и 4. Основное состояние атома обладает сверхтонкой структурой, причем состояние с  $F=4$  лежит выше, чем состояние с  $F=3$  (рис. 28, а). Расстояние между термами и дает частоту, через которую определяется единица времени — 1 секунда. На рис. 28, б приведена картина расщепления термов в чрезвычайно слабом внешнем магнитном поле. Полный момент импульса  $\mathbf{F}$  ориентируется в этом поле таким образом, что его параллельная полю компонента равна

$$F_z = m_F \hbar,$$

причем  $-F \leq m_F \leq F$ . Анализ поведения структуры расщепления в зависимости от внешнего поля (в том числе и поля, которое может быть помехой) имеет очень важное значение, поскольку при определении единицы времени требуется высокоточное измерение.

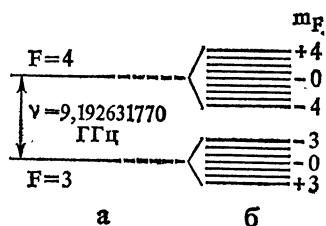


Рис. 28. ВЧ-излучение для основного состояния изотопа  $^{133}\text{Cs}$ .

а — в отсутствие магнитного поля; б — при слабом магнитном поле. (Зеемановское расщепление пропорционально напряженности магнитного поля.)



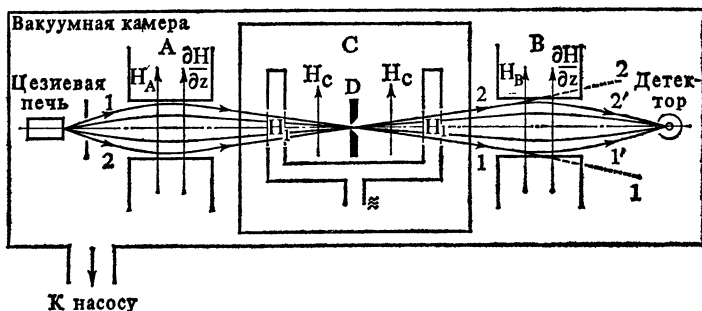


Рис. 29. Установка для наблюдения резонанса в атомном пучке.

Картина поля не обладает вращательной симметрией. Изображена плоскость, в которой проходят траектории частиц, представляющие интерес.

Рассчитаем прежде всего элементарные характеристики перехода в сверхтонкой структуре. Так как частота должна быть равна  $\nu = 9,19... \text{ ГГц}$ , разность энергий двух состояний (в отсутствие магнитного поля) должна иметь очень малое значение:

$$\delta W_0 = h\nu = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ эВ}.$$

Тем не менее требуется провести сравнение. Привлечем для этого «тепловую энергию»  $kT$  ( $k$  — постоянная Больцмана,  $1,3806 \cdot 10^{-22} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} = 0,863 \times 10^{-4} \text{ эВ/К}$ ), представляющую собой среднюю кинетическую энергию атома одноатомного газа при температуре  $T$  (с точностью до числового множителя порядка единицы). При  $T = 300 \text{ К}$  получим  $kT = 1/40 \text{ эВ}$ . Большая разница между  $\delta W_0$  и  $kT$  (при  $300 \text{ К}$ ) сказывается следующим образом. Согласно распределению Больцмана, отношение чисел заполнения для двух уровней сверхтонкой структуры в атоме равно

$$\frac{n(F_2=4)}{n(F_1=3)} = \frac{2F_2+1}{2F_1+1} e^{-\delta W_0/kT} = \frac{9}{7} \cdot 1,$$

т. е. оба состояния в атомах цезия заселены одинаково [если отвлечься от статистического множителя  $(2F_2+1)/(2F_1+1)$ ]. Если попытаться, например, измерить эффект поглощения резонансного типа<sup>1)</sup>, направляя на атомы высокочастотное излучение с  $\nu = 9,19... \text{ ГГц}$ , то мы непременно потерпим неудачу. При таком облучении будут происходить одновременно как процессы поглощения, так и процессы излучения, и в целом падающее излучение не ослабится — «резонанс» наблюдаться не будет. Отношение чисел заполнения может быть изменено в пользу состояния с  $F=3$  путем охлаждения газа, однако это неосуществимо в рамках возможностей обычных лабораторий: эквивалентная температура  $T'$ , определяемая равенством  $kT' = \delta W_0$ , составляет всего лишь  $T' = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ К} = 4,4 \text{ мК}$ . Поэтому требуется применение совершенно иной методики, чтобы можно было наблюдать выполнение условия совпадения частот типа резонанса.

Для наблюдения точного положения частоты перехода пользуются *методом резонанса атомного пучка*, замечательным приемом в исследовании ядерных моментов. Этот метод иллюстрируется на рис. 29. Использована вакуумная камера длиной несколь-

<sup>1)</sup> Соответствующая длина волны равна  $\lambda = c/\nu = 3,29 \text{ см}$ , так что она лежит в области высоких частот доступной со времени разработки радиолокационной техники.

ко метров. В ней размещены последовательно друг за другом цезиевая печь, система магнитов и детектор атомов цезия. Из выходного отверстия печи в виде атомного пучка испускаются пары цезия. Достигающие детектора частицы регистрируются по ионизации (происходящей на раскаленной вольфрамовой проволоке; измеряется ионный ток). Изображенные на схеме траектории проходят в действительности очень близко от оси установки. Поэтому она нуждается в тонком отлаживании (ширина щели около 0,01 мм, давление газа  $1,33 \cdot 10^{-4}$  Па =  $10^{-7}$  торр, неоднородность поля  $\partial H/\partial z = 0,636 \cdot 10^9$  А·м<sup>-2</sup> = 80000 Э·см<sup>-1</sup>; в современных установках используются поля протяженностью (область С) до 3 м [33]).

Влияние магнитных полей мы исследуем по их действию на атомы пучка. Приведем сначала полную формулу для вычисления  $\delta W_0$ . Каждый уровень сдвинут относительно исходного состояния (с нулевым спином ядра) на величину [34]

$$\begin{aligned} W_0(F, J, I) &= \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{g_I \mu_K \mu_B Z^3}{a_0^3 n^3} \times \\ &\times \frac{F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)}{J(J+1)(L+1/2)} = \\ &= \frac{A}{2} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)]. \end{aligned}$$

Здесь  $\mu_K$  — так называемый ядерный магнетон,  $\mu_B$  — магнетон Бора,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума ( $4\pi \cdot 10^{-7}$  В·с/А·м, гл. 8),  $a_0$  — борковский радиус ( $0,5 \cdot 10^{-10}$  м),  $Z$  — заряд ядра исследуемого атома, который должен обладать *одним* (излучающим) электроном с главным квантовым числом  $n$  и орбитальным квантовым числом  $L$  (здесь  $L=0$ ). Коэффициент  $A$  называют константой магнитного взаимодействия,  $g_I$  — ядерным  $g$ -фактором, который определяется соотношением  $\mu_I = \mu_K g_I I$  ( $^{133}\text{Cs}$ :  $\mu_I/\mu_K = +2,564$ ). Числовые значения этих величин равны

$$\begin{aligned} \mu_K &= \frac{m_e}{m_p} \mu_B = \frac{1}{1838} \mu_B, \\ \mu_B &= \mu_0 \frac{e\hbar}{2m_e} = 7,274 \cdot 10^{-11} \frac{\text{эВ}}{\text{А} \cdot \text{м}^{-1}} = \\ &= \mu_0 \cdot 5,788 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эВ}}{\text{Т}}. \end{aligned}$$

Таким образом, полная величина расщепления в отсутствие магнитного поля (рис. 28, а) равна

$$\delta W_0 = W_0(F_{\text{макс}}) - W_0(F_{\text{мин}}) = \begin{cases} AI(2J+1), & J \geq 1, \\ AJ(2I+1), & I \geq J, \end{cases}$$

т. е. в данном случае  $\delta W_0 = 7/4 A - (-9/4 A) = 4A$ . Отсюда следует величина константы магнитного взаимодействия

$$A = 1/4 \delta W_0 = 0,95 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}.$$

Векторная сумма моментов импульса оболочки и ядра приводит к выражению для *магнитного момента атома в целом*.

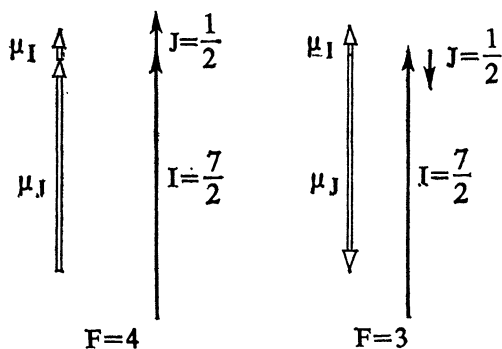


Рис. 30. Схема ориентации спинов и магнитных моментов при ВЧ-излучении для основного состояния изотопа  $^{133}\text{Cs}$ .

Однако, поскольку  $\mu_k < \mu_B$ , этот момент практически сводится к моменту электрона. Поэтому силы, действующие со стороны магнитных полей  $H_A$ ,  $H_B$ , а также  $H_C$ , сравнительно велики, хотя речь идет об анализе ядерных эффектов. На рис. 30 показана относительная ориентация момента импульса и магнитного момента; векторы, характеризующие ядро, настолько малы,

что их просто невозможно здесь изобразить. Отметим, что магнитный момент имеет противоположные направления при  $F=4$  и  $F=3$ . В результате уровень с  $F=3$  обладает меньшей энергией, чем уровень с  $F=4$  (рис. 28).

По выходе из печи атомный пучок попадает сначала в поле  $A$ , которое вызывает два эффекта: «поляризует» магнитные моменты атомов по полю и отклоняет их траектории путем силового воздействия ввиду неоднородности поля. Рассмотрим сначала поляризацию моментов по полю, полагая для простоты поле  $H_A$  слабым. Это означает, что связь между  $I$  и  $J$  остается без изменения. Магнитное поле создает момент силы, действующий на диполи, если они не ориентированы параллельно полю. Обладая моментом импульса, диполь совершает прецессионное движение около направления поля  $H_A$  (рис. 31), так что угол поляризации оказывается квантованным:

$$\cos \vartheta = \frac{m_F}{\sqrt{F(F+1)}}, \quad m_F = -F, \dots, +F.$$

При  $H=10^5$  А/м ( $B \approx 0,1$  Т,  $T=1000$  Гс) частота прецессии будет порядка 1,5 ГГц. Если учесть, что при выходе из печи атомы

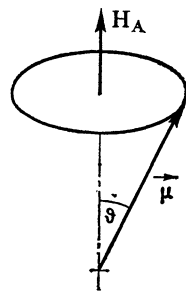


Рис. 31. Прецессия вектора магнитного момента вокруг направления поля.

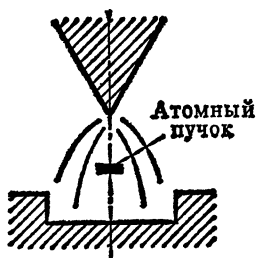


Рис. 32. Форма наконечников для полюсов магнита (теперь устаревшая) для создания неоднородности поля.

Пучок атомов движется перпендикулярно плоскости рисунка.

цезия обладают кинетической энергией около  $4 \cdot 10^{-2}$  эВ (температура печи близка к 400 К), то их скорость должна быть порядка  $2 \cdot 10^4$  м/с, и на пробег 1 м пути им требуется  $5 \cdot 10^{-6}$  с. При этом магнитные моменты в ходе прецессии успевают совершить  $2 \cdot 10^4$  полных оборотов на 1 м пути. Следует подчеркнуть, что эти данные всего лишь оценочные.

Если атом, обладающий магнитным моментом, поместить в магнитное поле, то у него появляется по направлению поля эффективный момент. Кроме того, в областях *A* и *B* создана неоднородность поля  $\partial H / \partial z$  (для этого полюса магнитов снабжены наконечниками типа изображенных на рис. 32). Возникает сила, действующая в положительном или отрицательном направлении оси *z* и равная по абсолютной величине  $F = \mu_{\text{эфф}} \partial H / \partial z$ . Ее расчет основывается на выражении энергии диполя в магнитном поле  $W = W(H)$ , справедливом для сколь угодно сильных полей. Тогда

$$F = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial z} \quad \text{и} \quad \mu_{\text{эфф}} = \frac{\partial W}{\partial H}.$$

Из квантовой механики известно выражение (после подстановки формулы (5.19) в (5.19б) в работе [34])

$$W(H) = W_{F=I \pm 1/2, m_F}(H) = -\frac{\delta W_0}{2(2I+1)} + \mu_B g_I m_F H \pm \frac{1}{2} \delta W_0 \sqrt{1 + \frac{4m_F x}{2I+1} + x^2},$$

где

$$x = \frac{1}{\delta W_0} (g_L \mu_B - g_I \mu_K) H.$$

На рис. 33 показан ход зависимости отношения  $W/\delta W_0$  от *x* для  $^{133}\text{Cs}$ . Лишь при слабом поле ( $x \ll 1$ ) имеет место эффект Зеемана с  $W \sim H$  [исключения составляют состояния  $(F_L, m_F) = (4, 4)$  и  $(4, -4)$ ]. При более сильных полях связь моментов ядра и оболочки нарушается (эффект Пашена — Бака), и оба момента (ядра и оболочки) ведут себя во внешнем поле как независимые. Это значит, что при больших значениях напряженности поля моменты оболочки и ядра прецессируют независимо друг от друга около направления поля. Частота прецессии выражается как ларморова частота лишь при малых и больших значениях напряженности поля и равна тогда  $\nu_L = \Delta W/\hbar$ , причем  $\Delta W$  — разность энергий соседних состояний в этом поле. Значения  $\Delta W$  можно определить по рис. 33.

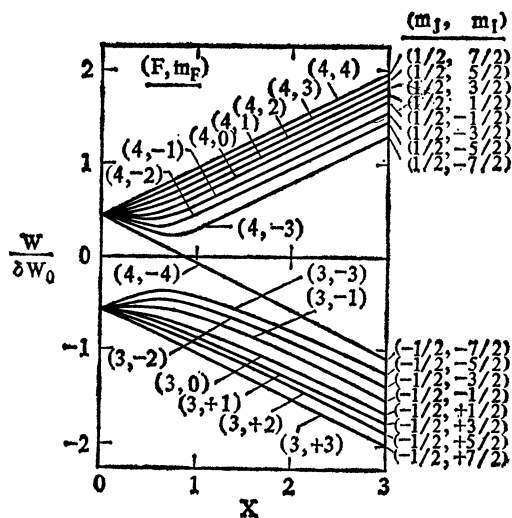


Рис. 33. Потенциальная энергия ядра изотопа  $^{133}\text{Cs}$  в магнитном поле ( $x \sim H$ ).

Рис. 33 позволяет понять смысл требования, чтобы использовались лишь переходы на уровень с  $m_F=0$ . В этом случае частота перехода весьма мало зависит от напряженности слабого внешнего поля, а, следовательно, на нее лишь очень немного повлияют помехи. Для атомов  $^{133}\text{Cs}$  имеем

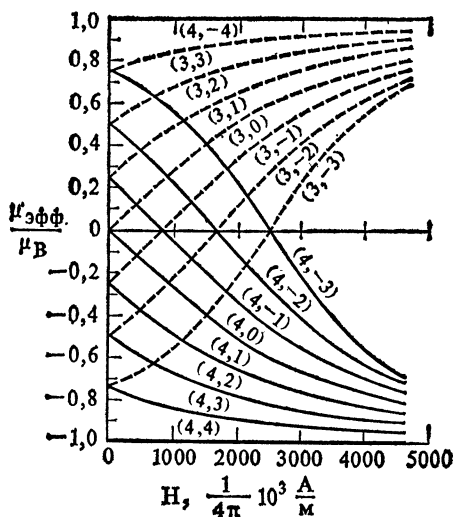
$$\begin{aligned} \nu &= 9,19 \dots \text{ГГц} + 6,77 \cdot 10^{-2} \text{ Гц} \cdot (H, \text{А} \cdot \text{м}^{-1})^2 = \\ &= 9,19 \dots \text{ГГц} + 427 \text{ Гц} \cdot (H, \text{Э})^2, \end{aligned}$$

и в области  $C$ , роль поля в которой наиболее существенна, принимается  $H \approx 4 \text{ А/м} \approx 50 \text{ мЭ}$  [33]. Это поле заметно слабее, чем магнитное поле Земли, и необходима тщательная экранировка от последнего.

Учитывая соотношение  $\mu_{\text{эфф}} = \partial W / \partial H$ , найдем из графика на рис. 33 магнитный момент, являющийся теперь функцией напряженности поля  $H$ . Повсюду, где кривая  $W(H)$  имеет горизонтальную касательную, магнитный момент обращается в нуль. Ход кривой для  $\mu_{\text{эфф}}$  приведен на рис. 34. Тем самым мы приходим ко второй составляющей воздействия поля на магнитный диполь, т. е. на атомы в поле магнитов рассматриваемой установки. В области  $A$  на атомы действует отклоняющая сила, придающая здесь траекториям параболический характер (рис. 29). На рис. 29 изображены траектории частиц, абсолютная величина и знак магнитного момента которых, а также величина и направление скорости таковы, что они проходят сквозь щель коллиматора  $D$ . Как правило,  $H_A$  — «сильное поле». Соответственно этому эффективные магнитные моменты следует брать из рис. 34 при  $H_A >$

Рис. 34. Эффективный магнитный момент ядра изотопа  $^{133}\text{Cs}$  ( $I=7/2$ ,  $J=1/2$ ).

В скобках даны значения  $F$  и  $m_F$ .



$> 3 \cdot 10^5$  А/м. Тогда магнитный момент конфигураций с  $F=3$ ,  $m_F = -3, \dots, +3$  всегда положителен, а конфигураций с  $F=4$ ,  $m_F = -4, \dots, +4$  всегда отрицателен. При  $F=4$ ,  $m_F = -4$  магнитный момент имеет положительный знак. Следовательно, в области  $A$  такие атомы всегда проходят соответственно выше и ниже центральной оси. Назначение слабого поля в области  $C$  состоит в том, чтобы поддерживать требуемую ориентацию дипольного момента: тогда в область  $B$  будут приходить строго упорядоченные группы частиц. Для этой цели служит поле с градиентом  $\partial H/\partial z$ , направленным так же, как в области  $A$ , так что из пучка выбывают все частицы с неправильной ориентацией вертикальной компоненты скорости. Приемника достигают лишь те частицы, которые должны претерпеть в области  $C$  смену ориентации дипольного момента, что осуществляется следующим образом.

В области  $C$  создается слабое однородное магнитное поле; траектории частиц там прямолинейны, а моменты прецессируют в соответствии с величиной напряженности поля вокруг направления  $H_C$ . Кроме того, включается небольшой электрический контур, существенным элементом которого является рамочная антенна, создающая переменное магнитное поле  $H_1$  с частотой  $\nu_1$ , направленное перпендикулярно  $H_C$ . Его можно разложить на два круговых поля, действующих следующим образом (рис. 35)<sup>1)</sup>. Это поле создает добавочный момент силы  $\mu \times H_1$ , который

<sup>1)</sup> Аналогичный прием применяется в методе ядерного магнитного резонанса.

может оказаться в резонансе, если подобрать частоту  $\nu_1$  равной частоте прецессии. Этот момент изменяется тогда в фазе с  $\mu$  и способен, если выразаться на языке классической физики, развернуть  $\mu$  по полю, изменив тем самым величину  $\mu_{\text{эфф}}$ . Здесь

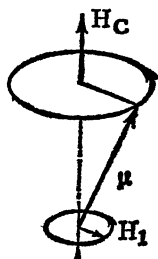


Рис. 35. К описанию ядерного магнитного резонанса.

следует прибегнуть к квантовомеханическому рассмотрению. При облучении резонансной частотой, равной  $\nu_1 = \delta W_0 / h = 9,19 \dots$  ГГц, происходят квантовые переходы (здесь от  $(F, m_F) = (4, 0)$  к  $(3, 0)$  и обратно). В этом случае желательны переходы в обе стороны, так как теперь они придают атомам требуемый момент (рис. 34, слабые поля), и снова возникают такие сочетания скорости и магнитного момента частицы, чтобы в области  $B$  осуществлялась фокусировка частиц на детекторе.

Практически это производится следующим образом. Частоту  $\nu_1$  модулируют с помощью более низкой частоты, что приводит к периодическому появлению резонанса. Сигнал на выходе образован током детектора, зависящим от частоты модуляции. На

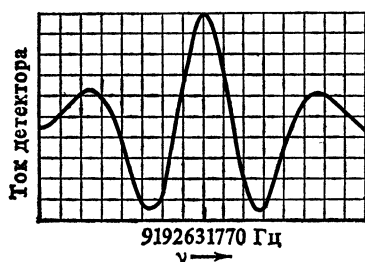


Рис. 36. Резонансная кривая установки для исследования атомного пучка (рис. 29).

рис. 36 представлены результаты таких измерений. Вновь подводя итоги того, как удалось получить здесь эффект резонансного поглощения, несмотря на факт первоначально одинаковой заселенности уровней, мы отметим, что в левой части установки, использующей атомный пучок, создается требуемый ансамбль частиц. Он состоит именно из тех частиц, скорость и магнитный момент которых должным образом связаны между собой. На этот ансамбль действует затем дискриминирующее поле (электромаг-

нитное поле  $H_1$ ), по отношению к которому и устанавливается резонанс.

В установку, изображенную на рис. 29, включено также одно весьма хитрое приспособление, создающее *две* области поля  $H_1$  с постоянным сдвигом по фазе. Это приводит к особенно острой форме резонансной кривой [35].

В настоящее время в целом ряде лабораторий ведется работа по *реализации единицы времени методами атомной физики*. В стационарных установках протяженность области поля  $S$  достигает 3 м. Существуют, однако, и транспортируемые установки, допускающие на местах непосредственно сравнение атомных часов.

Метод экспериментального получения высокой частоты состоит в том, что источником колебаний служит кварцевый осциллятор, а резонансная частота получается методом умножения. Этот кварцевый осциллятор первоначально калибруется при установлении резонансной частоты. К нему через приставку подключаются обычные часы. Так как цезиевые установки не обладают неограниченной долговечностью, на практике кварцевые часы сравнивают со стандартом частоты лишь раз в 1—10 дней.

В настоящее время определение резонанса, а тем самым и резонансной частоты возможно с относительной точностью  $1 \cdot 10^{-11}$ . Вопрос об установлении атомной шкалы времени все еще является предметом обсуждения. До сих пор различные радиостанции транслируют сигналы времени, определяемые национальными комитетами стандартов. В ФРГ радиосигналы даются Федеральным физико-техническим управлением и Германским гидрографическим институтом. Погрешности в транслируемой шкале времени составляют около  $10^{-6}$  с.

Существует еще два типа атомных часов, упорно конкурирующих с часами на  $^{133}\text{Cs}$ . Им еще не удалось придать столь высокую стабильность, которая достигнута в установке с  $^{133}\text{Cs}$ . Речь идет об использовании перехода в сверхтонкой структуре термов  $^{87}\text{Rb}$  и водородного мазера, запущенного еще в 1960 г. *Рамзей* (также с использованием перехода в сверхтонкой структуре с частотой 1,420405 ГГц). При взаимодействии атомов со стенкой или с используемым буферным газом все же происходят малые сдвиги частот, которых не удастся полностью избежать. Однако поскольку дальнейшая разработка лазерной техники открывает новые широкие перспективы, можно рассчитывать, что в недалеком будущем в нашем распоряжении окажутся многочисленные атомные часы, сравнимые по точности с имеющимися.



## 7 Реализация единицы массы

### 7.1. Сила и масса

Понятие массы впервые появляется в том разделе механики, который называют динамикой. Масса определяет количественную взаимосвязь между силой и ускорением (в более общем случае — между силой и количеством движения, однако здесь нам не потребуется углубляться в вопрос о релятивистском изменении массы при увеличении скорости). Согласно второму закону Ньютона, сила  $\mathbf{F}$  связана с ускорением  $\mathbf{a}$  ( $=\ddot{\mathbf{r}}$ ) соотношением

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \text{ или } \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad (1)$$

в которое входит коэффициент  $m$  — «масса». Это соотношение указывает, с одной стороны, на тот факт, что при выключении силы ( $\mathbf{F} = 0$ ) тело движется с ускорением, равным нулю, т. е. равномерно и прямолинейно ( $\mathbf{v} = \text{const}$ ). С другой стороны, скорость изменяется под действием силы не мгновенно, но ее изменение с течением времени подчиняется строгому закону:  $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}/m$ , причем масса является свойством, присущим телу. С помощью уравнения (1) можно либо получать определение единицы силы при заданном определении единицы массы, либо наоборот — из единицы силы получать единицу массы. Исторически использовались оба пути.

Если использовать терминологию гл. 3 (стр. 18), то в первом случае получается система единиц в механике с базисом {длина, масса, время} =  $\{lmt\}$ , а во втором случае — с базисом  $\{lFt\}$ , где через  $F$  обозначена сила. Базису  $\{lmt\}$  был бы вполне эквивалентен базис  $\{lWt\}$  ( $W$  — энергия), как легко видеть из рассуждений гл. 3, если отождествить  $W$  с  $ml^2t^{-2}$ . В системе СИ единицей массы служит 1 килограмм. Соответственно эту систему единиц в механике обозначают также МКС. В теоретической физике и теперь часто используют систему СГС (сантиметр—грамм—секунда), которая должна быть, однако, заменена на систему СИ. Базис  $\{lFt\}$  приводит при единице силы 1 кгс к технической системе единиц.

Масса — это единственная основная единица, связанная с существованием искусственно созданного материального прототипа, который может быть выбран свободно и который не требует производства опытов для обеспечения «неизменности» прототипа. Однако существенно, чтобы этот прототип был легко воспроизводим. *Прототип 1 кг массы представляет собой находящийся в Международном бюро мер и весов в Севре под Парижем цилиндр из сплава платины (90%) и иридия (10%) диаметром около*

39 мм и такой же высоты. Выбор этого сплава обеспечивает стойкость, однородность и высокую полируемость поверхности (так что его легко очищать), однако ввиду большой плотности ( $21,5 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ) он обладает тем недостатком, что отделение от него уже малых частей приводит к большому изменению массы <sup>1)</sup>.

Первоначально прототип массы должен был совпадать по своей массе с  $1 \text{ дм}^3$  воды при ее наибольшей плотности ( $3,98^\circ\text{C}$ ) и давлении 1 физ. атм ( $=101325 \text{ Па}=760 \text{ торр}$ ). Однако затем максимальная плотность воды была найдена равной  $0,999972 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ , т. е. прототип массы оказался на 28 мкг больше, чем был задуман. Это сказалось также на определении единицы объема, если таковая вводится в качестве независимой. В системе СИ единица объема является производной:  $1 \text{ м}^3 = (1 \text{ м})^3$ . Однако возможно также, если взять прототип массы, определить в качестве единицы объема 1 мл (1 миллилитр) — новую единицу объема, а именно объем, который занимает 1000 г воды при ее наибольшей плотности и давлении 1 физ. атм, так что

$$1 \text{ мл} = \frac{1 \text{ г}}{0,999972 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}} = 1,000028 \text{ см}^3.$$

Такая единица объема является некогерентной, так как коэффициент пересчета не равен 1. Официальной когерентной единицей в данном случае является 1 литр  $= 1 \text{ дм}^3$ .

В ходе установления прототипа массы было изготовлено много его экземпляров. При сложной процедуре сравнения должно обеспечиваться постоянство определения 1 кг с относительной точностью  $10^{-8}$  на протяжении многих тысяч лет. ФРГ располагает прототипом № 52. Его сравнение с прототипом в Севре в 1953 г. дало значение  $1 \text{ кг} + 152 \text{ мкг}$ , в 1974 — значение  $1 \text{ кг} + +187 \text{ мкг}$ . Следовательно, необходимо учитывать возможность колебаний, составляющих 25 мкг, что соответствует относительной точности  $2,5 \cdot 10^{-8}$ .

Принятому определению единицы массы соответствует когерентное определение единицы силы — *ньютон*:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Его размерность:  $\dim F = \text{длина} \cdot \text{масса} \cdot \text{время}^{-2}$ . С этой единицей непосредственно связана когерентная единица энергии:

$$1 \text{ джоуль} = 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Определенная в *технической системе* единица силы 1 кг выбрана в соответствии с силой тяжести в гравитационном поле Земли. Вне объема Земли сила тяжести (см. также стр. 14) равна

$$F = m \gamma \frac{m_E}{R^2} = mg, \quad (2)$$

где  $m_E$  — масса Земли,  $R$  — расстояние от центра Земли,  $m$  — величина «пробной массы»,  $g(=F/m)$  — напряженность гравитационного поля (в единицах  $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$ , размерность:  $\text{длина} \cdot \text{время}^{-2}$ ).

<sup>1)</sup> Вторичные стандарты изготавливаются из стали или латуни (плотность около  $8 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ).

Так как Земля не является шаром, а сплюснута к экватору, напряженность гравитационного поля на поверхности Земли повсюду возрастает от экватора к полюсу, так что имеет место зависимость от географической широты (см. ниже). Поэтому определение единицы силы должно быть связано с некоторым определенным местом. Соответственно этому вводится нормальное ускорение силы тяжести

$$g_n = 9,80665 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2},$$

так что единица силы 1 кгс определяется как сила, действующая на хранящийся в Севре прототип массы при нормальном ускорении силы тяжести. Эта единица силы является базисной в технической системе. Если же оставаться в рамках системы СИ, а 1 кгс брать лишь как новое наименование для  $9,80665 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} = 9,80665 \text{ Н}$ , то 1 кгс оказывается в СИ некогерентной единицей. Устаревшая техническая единица массы 1 т. е. м. строится в технической системе когерентно ( $1 \text{ т. е. м.} = 1 \text{ кгс} / 1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ), однако при этом

$$1 \text{ т. е. м.} = \frac{1 \text{ кгс}}{1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}} = 9,80665 \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{1 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}} = 9,80665 \text{ кг}.$$

Таким образом, относительно системы СИ 1 т.е.м.— некогерентная единица.

Постепенное изменение величины напряженности гравитационного поля на поверхности Земли при переходе от экватора к полюсу обусловлено формой Земли и ее вращением (центробежной силой). Земля является в хорошем приближении эллипсоидом вращения. Большая полуось (экваториальный радиус) для нее составляет  $a = 6378,388 \text{ км}$ , а малая полуось (расстояние от центра Земли до полюса) —  $b = 6356,912 \text{ км}$  (оба значения определены с точностью до 50 м). Таким образом, согласно равенству  $b = a(1 - \alpha)$ ,  $\alpha = 1/297$ . Получена формула, связывающая напряженность гравитационного поля с географической широтой:

$$g_0 = 9,78049 (1 + 0,0052884 \sin^2 \beta - 0,0000059 \sin^2 \beta) \frac{\mu}{c^2}. \quad (3)$$

Здесь  $g_0$  — так называемое ускорение силы тяжести на уровне моря, т. е. величина, полученная в предположении, что Земля представляет собой идеальный однородный эллипсоид вращения с равной поверхностью. Тогда при  $\beta = 45^\circ$  следует  $g_0 = 9,80629 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ , что слегка отличается от нормального ускорения силы тяжести. Истинные значения напряженности гравитационного поля получают, учитывая высоту точки наблюдения над уровнем моря и плотность пород на этом участке. Расчет ведется следующим образом. Земля моделируется шаром, и тогда изменение напряженности гравитационного поля с высотой должно быть равно

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{r=R_E} = -2\gamma \frac{m_E}{R_E^3} = -\frac{2}{R_E} g(R_E),$$

так что

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -3,086 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \frac{1}{\text{м}}.$$

Умножение на  $h$  дает «исправленное значение  $g$  на поверхности». Поправка на плотность пород представляет собой еще один аддитивный член  $2\pi\gamma h$  (так называемая *поправка Бугера*), где  $2\pi\gamma=0,419\cdot 10^{-9}$  м<sup>3</sup>/кг·с<sup>2</sup>,  $\rho$  — средняя плотность земной коры в точке наблюдения. Опыт дает для  $dg/dh$  на поверхности Земли значения между  $2,5$  и  $3,5\cdot 10^{-6}$  м·с<sup>-2</sup>/м.

Наряду с радиальным, согласно формуле (3), существует и горизонтальный градиент  $g$ . В первом приближении

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \beta} \right|_{r=R_E} = 9,78049 \cdot 2 \cdot 0,0052884 \sin \beta \cos \beta \frac{1}{6,38 \cdot 10^6 \text{ м}} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Эта величина обращается в нуль на полюсе и на экваторе, но при  $\beta=45^\circ$  она равна

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \beta} \right|_{r=R_E} (\beta=45^\circ) \approx 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \frac{1}{\text{м}}.$$

В действительности получены значения от 0 до  $1\cdot 10^{-8}$  м·с<sup>-2</sup>/м. Эти оценки показывают, насколько хорошо могут учитываться вариации  $g$ . Тем самым обосновано введение нормального ускорения силы тяжести.

Остается еще указать на влияние вращения Земли, которое, как известно, обусловило сплюснутую форму земного шара. Угловая скорость вращения равна

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,400} \text{ с}^{-1}.$$

Центробежная сила  $F_z$  направлена параллельно плоскости экватора (рис. 37). Здесь представляет интерес лишь составляющая  $F_\perp$ , перпендикулярная поверхности Земли (принятой за шарообразную). Центробежная сила  $F_z$ , которая действует на массу  $m$ , вращающуюся с угловой скоростью  $\omega$  на расстоянии  $r$  от оси вращения и обладающую линейной скоростью  $v=r\omega$ , равна

$$F_z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Следовательно,

$$\frac{F_\perp}{m} = \frac{F_z \cos \beta}{m} = \omega^2 R_E \cos^2 \beta = 3,36 \cdot 10^{-2} \cos^2 \beta \text{ м/с}^2.$$

Значения этой силы на экваторе и на полюсе различаются, таким образом, на  $3,36 \cdot 10^{-2}$  м/с<sup>2</sup>. Из формулы (3) получаем

$$\begin{aligned} g_0 \text{ (на полюсе)} - g_0 \text{ (на экваторе)} &= 5,16 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2 = \\ &= \Delta g_0 \text{ (гравитац.)} + \Delta g_0 \text{ (центробежн.)} = \\ &= \Delta g_0 \text{ (гравитац.)} - 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\Delta g_0 \text{ (гравитац.)} = 8,52 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2.$$

3\*

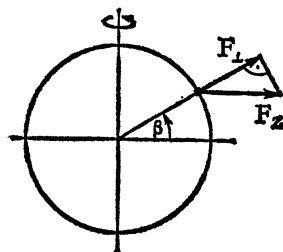


Рис. 37. К расчету величины вклада центробежной силы в напряженность гравитационного поля.

## 7.2. Вес; гравитационная и инертная массы

В обыденной жизни термин «вес» употребляется в двух значениях: массы и силы. Однако вес определяется главным образом путем сравнения грузов с помощью весов. Это сводится тогда лишь к сравнению масс, так как грузы обладают массой. Когда рычажные весы находятся в равновесии, имеет место равенство  $(\text{сила} \cdot \text{плечо})|_{\text{слева}} = (\text{сила} \cdot \text{плечо})|_{\text{справа}}$ .

Появление силы вызывается гравитационным полем, так что

$$m_l g L_l = m_r g L_r$$

или

$$m_l = \frac{L_r}{L_l} m_r.$$

Отношение между длинами плеч весов может быть разным для разных типов весов, так что в действительности производится сравнение масс. Поэтому в системе СИ под весом, грузом, нагрузкой (например, для кранов) понимается масса.

При прецизионных измерениях веса необходимо учитывать поправку на *подъемную силу*. Как грузы, так и детали весов обладают определенным объемом, так что на каждое плечо в воздухе действует подъемная сила, и силы, действующие на разные плечи, вообще говоря, различны. Подъемная сила = объем · (плотность воздуха). На обычных гирях указывается их истинная масса, что требует еще поправки на подъемную силу всех участвующих во взвешивании предметов. Поэтому было предложено производить взвешивания, требующие особой точности, в вакууме. Однако в таком случае возникает трудность, вызываемая выделением из материалов поглощенных ими газов, что может приводить к не поддающемуся учету изменению веса. Поэтому взвешивания производятся в основном в воздухе.

В поле тяжести можно, однако, определять силу веса и с помощью пружинных весов. Эта сила равна  $F_g = mg$ . Как уже было отмечено выше, она зависит от места наблюдения на поверхности Земли, тогда как масса  $m$  в рамках применимости нерелятивистской механики является неизменным свойством тел и, в частности, любой атомной частицы. Напряженность гравитационного поля  $g$  на поверхности Земли многократно являлась предметом измерений, так как она очень важна для определения динамических постоянных, характеризующих Солнечную систему. Наше внимание здесь привлечет в особенности разница между гравитационной и инертной массами. Единица массы (инертной) определялась в тесной связи с ускорением. Однако ниоткуда не следует, что это свойство тела одновременно должно быть тем самым, которое фигурирует в законе тяготения, описывающем гравитационное взаимодействие между двумя телами. Не-

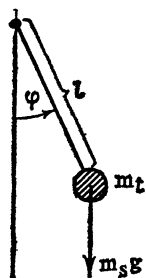


Рис. 38. К выводу закона колебаний маятника.

обходимо выяснить, совпадает ли фигурирующая в законе тяготения гравитационная масса с инертной массой. Для этого можно привлечь опыты с падением тел. При свободном падении двух разных тел вблизи поверхности Земли выполняются соотношения

$$m_{t_1} a_1 = \gamma \frac{m_E m_{s_1}}{R^2}, \quad m_{t_2} a_2 = \gamma \frac{m_E m_{s_2}}{R^2},$$

где инертная масса обозначена  $m_t$ , а гравитационная —  $m_s$ . Если соответствующие стороны этих соотношений разделить друг на друга, получится равенство

$$\frac{m_{t_1} a_1}{m_{t_2} a_2} = \frac{m_{s_1}}{m_{s_2}}.$$

Опыт дает  $a_1 = a_2$ , так что

$$m_{t_1}/m_{s_1} = m_{t_2}/m_{s_2},$$

т. е. отношение инертной и гравитационной масс остается постоянным. Этот факт был доказан еще *Ньютоном* в классическом опыте с маятником.

Для ускорения груза маятника (рис. 38) выполняется равенство

$$m_t l \ddot{\varphi} = -m_s g \sin \varphi,$$

переходящее при малых отклонениях ( $\sin \varphi \approx \varphi$ ) от положения равновесия в

$$m_t l \ddot{\varphi} = -m_s g \varphi.$$

Это дифференциальное уравнение обладает периодическими решениями, пропорциональными  $\sin \omega t$  или  $\cos \omega t$  (либо их линейной комбинации), тогда как круговая частота равна

$$\omega = \sqrt{\frac{m_s \cdot g}{m_t l}},$$

а период колебаний  $T = 2\pi \sqrt{l/g} \sqrt{m_t/m_s}$ . *Ньютон* следующим образом выяснил, постоянно ли отношение  $m_t/m_s$  или оно даже равно 1 [36]: «Однако уже давно было обнаружено другими, что (если принять во внимание малое сопротивление воздуха) все тела при падении проходят равные отрезки за равные времена; с помощью же маятника такое равенство времен может быть обнаружено с великой точностью... Я испытал предметы из золота, серебра, свинца,

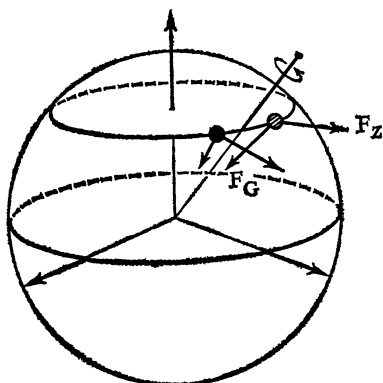


Рис. 39. Эксперимент Этвёша для определения отношения  $m_t/m_s$ .

по этим экспериментам с телами одного и того же веса можно было обнаружить разницу в количестве вещества менее одной тысячной части от целого».

Для всех экспериментов, посвященных выяснению тождественности гравитационной и инертной масс, характерно сравнение «силы ускорения»  $m_t a$  и силы тяжести  $m_s g$ . Особые заслуги в этом направлении принадлежат *Р. Этвёшу*. Он выполнил ряд измерений градиентов гравитационного поля, а с помощью одних из своих наиболее точных весов измерил также отношение  $m_t/m_s$ . Пусть на поверхности Земли (например, на широте  $45^\circ$ ) установлены крутильные весы с точной ориентацией с запада на восток (рис. 39). Пусть массы на концах коромысла строго уравновешены, хотя и состоят из разных веществ. На каждую из этих масс действует одинаковая сила тяжести (направленная к центру Земли). На каждую из соответствующих инертных масс горизонтально (параллельно экваториальной плоскости) действует центробежная сила, так что имеются составляющие сил, параллельные поверхности Земли. Лишь в том случае, когда эти силы одинаковы, т. е. когда равны друг другу не только гравитационные, но и инертные массы, крутильные весы не будут поворачиваться. Закручивание нити весов наблюдается при помощи зеркала и светового зайчика, и точность повышается, коромысло переориентируется с линии запад — восток на линию восток — запад (источник света и зеркало поворачиваются вместе с весами). Этвёш произвел сравнение восьми различных веществ с одним — платиной. Он нашел, что отношение  $m_t/m_s$  для них одинаково с точностью  $10^{-8}$ . Новые измерения дают совпадение с точностью  $10^{-10}$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> См. также работу [58].— *Прим. перев.*

стекла, песка, обычной соли, дерева, воды и зерна. Я брал по два одинаковых деревянных ящичка, наполнял один деревом, а в центре другого подвешивал кусок золота того же веса (столь точно, сколь это мне удавалось). Ящички подвешивались на одинаковых бечевках длиной по 11 футов, так что получалось два маятника, в точности одинаковые по весу и форме, встречающиеся в воздухе одно и то же сопротивление. Расположив их рядом друг с другом, я наблюдал, как они качались туда и обратно длительное время, и колебания их совпадали. И поэтому отношение количество вещества в золоте к количеству вещества в дереве было тем же, что и отношение действия движущей силы на все золото к действию движущей силы на все дерево, т. е. веса одного к весу другого... И

### 7.3. Количество вещества

В атомистической концепции строения материи вместо массы возникает еще одно представление о «количестве вещества». Это представление тем более понятно, что ряд явлений и закономерностей допускают особенно простое описание, если связать их с числом частиц. Впервые роль числа частиц, как такового, совершенно независимо от массы отдельной частицы проявилась в уравнении состояния (идеального) газа, давление которого  $p$  подчиняется простому соотношению  $p = nkT$  (где  $n$  — число частиц в единице объема,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная или термодинамическая температура). Свойства отдельных частиц при этом не имеют значения. Аналогичные заключения получены относительно осмотического давления и понижения давления для растворов. Детальное указание свойств вещества можно также свести к единственной количественной характеристике, если говорить об одинаковом количестве вещества как об одном и том же числе частиц (правило Дюлонга — Пти для теплоемкости твердых тел; теплоемкость идеального газа). Таким образом, в системе СИ было принято в качестве базисной величины *количество вещества*, измеряемое в молях.

Под количеством вещества 1 моль понимается такое количество некоторого вещества, в котором *содержится точно столько частиц, сколько атомов углерода  $^{12}\text{C}$  содержится в 12,000 г  $^1$* ). Это число частиц, носящее название *числа Авогадро*  $^2$ ), может быть найдено, если известна масса одного атома  $^{12}\text{C}$ , так как

$$N_A = \frac{12,000 \text{ г/моль}}{\text{масса одного атома } ^{12}\text{C}}.$$

При этом следует учитывать, что новые измерения массы атома  $^{12}\text{C}$  могут привести к изменению этого численного значения. Число Авогадро обладает *размерностью* (количество вещества) $^{-1}$  и измеряется в *единицах* моль $^{-1}$ . При этом макроскопическую массу количества вещества 1 моль можно выразить как

$$M = N_A \cdot (\text{масса одного атома}) = N_A m_a,$$

где  $[M] = 1 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}$  (или  $1 \text{ кг/кмоль}$ ). Величина  $M$  называется *молярной массой*. Наилучшее в настоящее время определение

<sup>1</sup>) Относительно атомов и изотопов см. стр. 74.

<sup>2</sup>) Лучшее «постоянная Авогадро».

<sup>3</sup>) Масса атома  $^{12}\text{C}$  измеряется косвенно. Через относительную величину атомной массы (стр. 73) она связана с массой атома водорода, которая фигурирует во многих атомных и ядерных величинах. Отсюда и по сей день вычисляется масса атома  $^{12}\text{C}$  с привлечением ряда атомных и макроскопических постоянных. См. по этому поводу работу Тейлора и др. [25].



[37] числа  $N_A$  дает

$$N_A = (6,0220921 \pm 0,0000062) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Если взято произвольное количество вещества, имеющее массу (выраженную в кг или в г), можно непосредственно указать соответствующее ей количество вещества:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m_a N}{m_a N_A} = \frac{m}{M},$$

причем

$$[\nu] = [m]/[M] = 1 \text{ моль}.$$

Индивидуальные характеристики веществ часто указываются как *удельные величины*, т. е. величины, отнесенные к *единице массы*, например удельный объем ( $V/m$ ), удельная (массовая) теплоемкость ( $Q/m$ ), удельная радиоактивность ( $\dot{N}/m$ ) и т. д. Совершенно аналогично вводятся и *молярные величины*, отнесенные к *единице количества вещества*. Таков молярный объем (объем одного моля), молярная теплоемкость (теплоемкость одного моля) и т. д. При этом, например, уравнение идеального газа принимает вид

$$p = nkT = \frac{N}{V} kT, \quad pV = \frac{N}{N_A} kT,$$

или

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT$$

и

$$p \cdot \frac{V}{\nu} = RT, \quad pV_m = RT,$$

где  $R = kN_A$  — универсальная газовая постоянная, а  $V_m$  — молярный объем. Последнее соотношение представляет собой уравнение состояния, отнесенное к одному молю вещества. Для теплоемкости можно записать

$$c = \frac{Q}{m}, \quad C = \frac{Q}{\nu} = \frac{Q}{m} M = cM.$$

Чтобы *представить* или *реализовать единицу количества вещества* 1 моль, уже нельзя опираться на соотношение, определяющее  $N_A$ ; к массе атома мы еще вернемся. Однако удалось определить  $N_A$  путем макроскопических измерений на монокристалле кремния (Si) [38]. Этот метод сводится в основном к следующему. Если  $m$  — масса кристалла,  $V$  — его объем, то плотность равна

$\rho = m/V = Nm_a/V$ , где  $m_a$  — масса одного атома. Здесь величина  $V/N$  выражает объем, занимаемый одним атомом и следующий из теории строения кристалла. Если  $a$  — длина ребра элементарной ячейки, а  $f$  — число атомов в этой ячейке, то искомый объем равен  $a^3/f$ , т. е. выполняется соотношение

$$m_a = \rho a^3 / f,$$

и, согласно определению массы одного моля, мы имеем

$$N_A = \frac{Mf}{\rho a^3}.$$

При этом удастся измерить постоянную решетки кристалла с относительной погрешностью  $0,3 \cdot 10^{-6}$  ( $a = 543,106515$  пм при  $25^\circ\text{C}$ ), и молярная масса определяется с помощью масс-спектрометра (должно проводиться измерение для смеси изотопов) по молекулярному весу (см. ниже). Измерение плотности удастся производить с относительной точностью  $0,7 \cdot 10^{-6}$ . Так получается величина постоянной Авогадро

$$N_A = 6,0220943 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

относительная погрешность равна  $1,05 \cdot 10^{-6}$ ). Это определение явно точнее, чем лучшее из принятых до 1969 г. [25], и привело к пересчету целого ряда мировых постоянных (приложение III).

*Масса атома* очень мала, а ее прецизионное определение затруднительно. Однако при современном уровне развития измерительной техники сравнительно просто измерять *относительные атомные массы*. Это представляет собой любопытную иллюстрацию существования совершенно изолированной области (здесь область относительных атомных масс), в которой возможны прецизионные измерения, так что должны сразу определяться все абсолютные значения (в единице массы 1 кг), как только удастся найти абсолютную величину массы лишь одного атома. В 1960 г. было решено принять за основу в этом определении  $^{1/12}$  массы атома углерода  $^{12}\text{C}$ . При этом относительные атомные массы (называвшиеся ранее атомными весами) равны

$$A_r = \frac{m_a}{^{1/12}m(^{12}\text{C})} = \frac{m_a N_A}{^{1/12}m(^{12}\text{C}) N_A} = 12 \frac{M_a}{M(^{12}\text{C})}.$$

Эти величины представляют собой неименованные числа (так как являются отношениями). Например, для самого углерода  $^{12}\text{C}$  имеем  $A_r = 12 \cdot 12 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1} / 12 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1} = 12$ . И вообще, если известна (из таблиц) относительная атомная масса, то можно указать молярную массу  $M_a$  для любого соответствующего вещества:

$$M_a = A_r \cdot \frac{1}{12} M(^{12}\text{C}) = A_r \frac{\text{г}}{\text{моль}}.$$

Отсюда, опираясь на формулу  $\nu = m/M_a$  (стр. 72), можно найти количество вещества путем одного только взвешивания.

Взаимозависимость атомной массы и  $N_A$  видна также из определения *атомной единицы массы*

$$1 \text{ а.е.м.} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = \frac{1}{12} \frac{M(^{12}\text{C})}{N_A} = \frac{1 \text{ г}}{6,0220921 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}} = \\ = 1,6605525 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Что касается так называемых химических элементов, то было обнаружено, что они, как правило, состоят не из единственного типа атомов. Каждый отдельный атом характеризуется зарядовым числом ядра  $Z$  ( $Ze$  — заряд  $Z$  содержащихся в ядре протонов) и числом нейтронов  $N$  в этом ядре ( $A = N + Z$  — массовое число ядра). Число электронов в оболочках, компенсирующих заряд ядра, также равно  $Z$ . Конкретный вид атома, характеризуемый данными  $Z$  и  $A$ , называется *изотопом*. Таким образом, природные химические элементы содержат, как правило, по несколько изотопов. Изотопы каждого данного элемента характеризуются одним и тем же значением  $Z$ , но различаются числом  $N$  (при этом изотопы одного и того же элемента занимают одно и то же место в периодической системе элементов). Однако существуют и чистые (в изотопном смысле) элементы, например у природного алюминия имеется только один изотоп с  $Z=13$ ,  $A=27$  (так что  $N=14$ ), а такой химический элемент, как олово, содержит 10 изотопов. Процентное содержание изотопов для элементов земного происхождения практически одно и то же во всех точках Земли. В случаях отклонений от этого правила всегда ведутся поиски причин, породивших эти отклонения (определение возраста геологических пород). Ввиду постоянства процентного содержания изотопов имеет смысл указывать средний *атомный вес* природных элементов. Под ним понимают относительную среднюю массу ядер изотопов элемента:

$$\bar{A}_r = \frac{\bar{m}_a}{1/12 m(^{12}\text{C})} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{x_1 + \dots + x_n} \times \\ \times \frac{1}{1/12 m(^{12}\text{C})},$$

или при  $\sum x_i = 1$

$$\bar{A}_r = x_1 A_{r_1} + \dots + x_n A_{r_n}.$$

*Пример:* для природного элемента олова (Sn)

$$\bar{A}_r = 0,0096 \cdot 111,904835 + 0,0066 \cdot 113,902773 + 0,0035 \times \\ \times 114,903346 + 0,1430 \cdot 115,901745 + 0,0761 \cdot 116,902959 + \\ + 0,2403 \cdot 117,901606 + 0,0858 \cdot 118,903314 + 0,3285 \times \\ \times 119,902199 + 0,0472 \cdot 121,903442 + 0,0594 \cdot 123,905272 = \\ = 118,7338.$$

(В таблицах атомных весов для естественной смеси изотопов олова приводится значение 118,69 на основании непосредственных измерений; относительное отклонение около  $4 \cdot 10^{-4}$  пока практически неизбежно ввиду наложения многочисленных малых погрешностей для величин распространенности изотопов и их масс.)

## 7.4. Система атомных масс [39]

Знание атомных масс или масс изотопов приобретает все большее значение также и в техническом аспекте в связи с развитием ядерной техники. Причина заключается в основном в том, что эквивалентность массы и энергии ( $E=mc^2$ ), известная из теории относительности, позволяет в равной мере пользоваться как энергией, так и массой. В частности, энергия, выделяющаяся в ядерных реакциях, может быть определена по массам участвующих в них частиц. С другой стороны, массы также можно находить, измеряя энергию.

Как было сказано выше, изотопы характеризуются заданием числа  $Z$ , указывающего заряд ядра, и массового числа  $A (=Z+N)$ . Как  $Z$ , так  $A$  и  $N$  — целые числа. Относительные массы изотопов оказываются почти целочисленными (это было одним из важных открытий при изучении строения атомного ядра). Величина  $\Delta = (A_r - A)$  а. е. м.

называется *избытком массы* данного изотопа. *Энергия связи* для атома изотопа (в основном сводящаяся к энергии связи ядра) получается, если сравнить массу атома с суммарной массой его составных частей (так называемый дефект массы — это энергия связи, деленная на  $c^2$ ). Для измерения масс изотопов (а тем самым и избытка массы) пользуются масс-спектрографами. Это приборы, в которых электрически заряженные ионы должны двигаться в магнитном и (или) электрическом полях по определенной траектории, чтобы попасть на детектор. По характеру траекторий определяется масса иона (для чего, конечно, требуется знать остальные характеристики ионов, такие, как заряд, скорость или энергия). Наиболее важным для ядерной физики фактом является то, что такие приборы позволяют прежде всего производить очень точное *сравнение* масс, так что очень точно определяются именно значения избытка массы. Конечно, при этом нужно *установить* для *некоторого* определенного изотопа, что его избыток массы равен нулю, т. е. для него должно быть  $A_r = A$ . Выше мы уже пользовались принятым в настоящее время условием, что это касается изотопа  $^{12}\text{C}$ . Проиллюстрируем этот подход на *примере* (так называемом основном дублете). В пло-

скости изображения масс-спектрографа <sup>1)</sup> найдены разности масс (массы изображаются через химические символы):

$$^{12}\text{C}^{14}\text{H}_4^+ - ^{16}\text{O}^+ = 36,385 \cdot 10^{-3} \text{ а. е. м.},$$

$$^2\text{H}_3^+ - \frac{1}{2} ^{12}\text{C}^{++} = 42,306 \cdot 10^{-3} \text{ а. е. м.},$$

$$^1\text{H}_2^+ - ^2\text{H}^+ = 1,548 \cdot 10^{-3} \text{ а. е. м.}$$

Произведем подстановку  $\Delta = (A_r - A) \cdot \text{а. е. м.}$ , так что  $^{12}\text{C} \triangleq 12 \text{ а. е. м.}$  ( $\Delta = 0$ ),  $^1\text{H} \triangleq 1 \text{ а. е. м.} + \Delta_{\text{H}}$ ,  $^2\text{H} \triangleq 2 \text{ а. е. м.} + \Delta_{\text{D}}$ ,  $^{16}\text{O} \triangleq 16 \text{ а. е. м.} + \Delta_{\text{O}}$ , и получим

$$\left. \begin{aligned} \text{O} + 4\Delta_{\text{H}} - \Delta_{\text{O}} &= 0,036385 \text{ а. е. м.} \\ 3\Delta_{\text{D}} - \text{O} &= 0,042306 \text{ а. е. м.} \\ 2\Delta_{\text{H}} - \Delta_{\text{D}} &= 0,001548 \text{ а. е. м.} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \Delta_{\text{D}} &= 0,014102 \text{ а. е. м.}, \\ \Delta_{\text{H}} &= 0,007825 \text{ а. е. м.}, \\ \Delta_{\text{O}} &= -0,005084 \text{ а. е. м.}, \end{aligned}$$

откуда

$$m(^1\text{H}) = 1,007825 \text{ а. е. м.}, \quad m(\text{D}) = 2,014102 \text{ а. е. м.},$$

$$m(^{16}\text{O}) = 15,994915 \text{ а. е. м.}$$

Отсюда видно, что относительные массы изотопов можно определять очень точно. Первоначально при сравнении в качестве опорного брался не изотоп  $^{12}\text{C}$ , а целых два опорных ядра. Химики при своих определениях атомного веса пользовались в качестве опорной средней массой природного элемента кислорода, а физики — массой изотопа кислорода  $^{16}\text{O}$ . Множитель для пересчета от одной системы к другой был тем более неудобен, что все удельные величины (отнесенные к массе одного моля) также подлежали пересчету. В 1960 г. в качестве опорной была выбрана масса изотопа  $^{12}\text{C}$ . Причин для этого было несколько, а главная состояла в том, что углерод входит в огромное число химических соединений, с помощью которых становится возможным установить также прецизионное соотношение между массами тяжелых элементов и  $^{12}\text{C}$  [38].

Первоначально самым точным был масс-спектрографический метод. Позже к нему добавились прецизионные измерения выхода энергии при ядерных реакциях. Например, частица  $a$  (с массой  $m_a$ ), обладающая кинетической энергией  $E_a$ , сталкивается с частицей  $A$  (с массой  $m_A$  и энергией  $E_A$ ) и происходит (изредка) ядерная реакция, т. е. из ядер  $a$  и  $A$  возникают новые ядра  $b$  ( $m_b$ ,  $E_b$ ) и  $B$  ( $m_B$ ,  $E_B$ ), что в конце концов означает перегруппировку того же общего числа протонов и нейтронов. Если использовать

<sup>1)</sup> Здесь речь идет о магнитном спектрографе, в котором траектория частицы определяется в основном удельным зарядом  $e/m$  (отношением заряда иона к его массе).

релятивистский закон сохранения энергии, то получим

$$m_a c^2 + E_a + m_A c^2 + E_A = m_b c^2 + E_b + m_B c^2 + E_B,$$

$$(m_a + m_A) c^2 - (m_b + m_B) c^2 = E_b + E_B - (E_a + E_A) = Q.$$

Это соотношение определяет выход энергии  $Q$ , источником которой является либо кинетическая энергия реагентов, либо массы этих ядер. Соотношение может быть переписано с использованием определенной выше величины избытка массы как

$$(\Delta_a + \Delta_A) c^2 - (\Delta_b + \Delta_B) c^2 = Q.$$

В настоящее время мы располагаем многократно согласованной системой значений  $Q$  и масс, в частности на основании энергий распада радиоактивных ядер, и можем поэтому производить с помощью мощных вычислительных устройств расчеты непротиворечивой системы масс изотопов <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Часто пользуются результатами последних расчетов [40].

## 8 Реализация единицы силы электрического тока

Углубление наших знаний об электрических и магнитных явлениях и возникновение электротехники, область применения которой быстро расширяется, поставили совершенно новые проблемы перед естествознанием и техникой измерений. При описании элементарных взаимодействий между двумя электрическими зарядами, магнитами или электрическими токами (закон Кулона, 1785; закон Ампера, 1820) использовался лишь один из известных ранее параметров, а именно сила, определенная в механике. Насколько легко и плодотворно было определение единицы новой величины — «заряда» из закона Кулона, настолько же трудным оказался путь к установлению общей системы единиц для механики и теории электромагнетизма. Эти единицы, пригодные для всеобщего употребления, дала только система СИ. Долго длившиеся неувязки именно в этом разделе нашей системы единиц помогли, однако, внести ясность в основные понятия и, в частности, показали, что вполне возможно определение замкнутых систем, достаточных для работы в отдельных областях, но требующих в дальнейшем установления связей с другими системами в определенных «точках сшивания». И сегодня еще в теоретической физике часто проводят расчеты для задач электродинамики в системе СГС, с чем связано известное представление о равноправности величин  $E$  (напряженности электрического поля) и  $D$  (индукции этого поля), равно как  $H$  и  $B$ . В системе СИ, напротив, предпочтение совершенно недвусмысленно отдается описанию, включающему постоянные  $\epsilon_0$  (диэлектрическую постоянную вакуума) и  $\mu_0$  (магнитную проницаемость вакуума). При этом полезно коснуться и единиц СГС, чтобы увидеть отчетливо, в чем состоит основное различие между обеими системами. Следует, однако, подчеркнуть, что систему СИ можно ввести без каких-либо ссылок на систему СГС.

### 8.1. Система СГС в теории электромагнетизма

Если выражение для силы взаимодействия между двумя точечными зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$  (закон Кулона) записать в виде

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (1)$$

то электростатическая единица заряда  $Q_1=Q_2=1$  СГСЭ будет определяться тем, что на расстоянии 1 см сила должна быть равна 1 дин  $= 1 \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^{-2} (= 10^{-5} \text{ Н})$ . Следовательно,

$$\dim Q = \text{масса}^{1/2} \cdot \text{длина}^{3/2} \cdot \text{время}^{-1},$$

так что в системе СГС  $1 \text{ СГСЭ} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}$ . На этой основе осуществляется полное построение системы СГСЭ, например: напряженность электрического поля ( $E$ ) измеряется в единицах

$$1 \text{ СГСЭ} = 1 \text{ дин} / 1 \text{ СГСЭ заряда} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{-1/2} \cdot \text{с}^{-1},$$

электрическое напряжение

$$1 \text{ СГСЭ} = 1 \text{ СГСЭ напряженности} \cdot 1 \text{ см} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1},$$

емкость

$$1 \text{ СГСЭ} = 1 \text{ СГСЭ заряда} / 1 \text{ СГСЭ напряжения} = 1 \text{ см},$$

электрический ток

$$1 \text{ СГСЭ} = 1 \text{ СГСЭ заряда} / 1 \text{ с} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-2},$$

электрическое сопротивление

$$1 \text{ СГСЭ} = 1 \text{ СГСЭ напряжения} / 1 \text{ СГСЭ тока} = 1 \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}.$$

В отношении магнитостатической системы единицы посту-  
пают совершенно аналогично, взяв за основу понятие магнитного  
полюса. Это, однако, необязательно, так как можно, следуя  
подходу Гаусса (1833), проводить измерения с помощью «маг-  
нитов». Для малого магнитного диполя (малого намагниченного  
стержня, обладающего магнитным дипольным моментом  $M$  с раз-  
мерностью (магнитный заряд  $\cdot$  длина), подвешенного как крутиль-  
ный маятник в геомагнитном поле Земли, определяют тогда пе-  
риод колебаний, зависящий от величины момента силы  $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$ .  
Затем определяют отклонение малой магнитной стрелки в сум-  
марном поле магнитного диполя и Земли, откуда следует отно-  
шение  $M/H$ . Тем самым можно «абсолютным» образом определить  
как напряженность магнитного поля, так и величину момента  
диполя, т. е. дополнительно к единицам механики. Так полу-  
чаются для магнитного заряда  $P$ , напряженности магнитного  
поля  $H$  и магнитного скалярного потенциала точно те же размер-  
ности и единицы, что и для электрического заряда, напряжен-  
ности электрического поля и электрического напряжения в элек-  
тростатической системе единиц.

$$1 \text{ СГСМ магнитного заряда} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$1 \text{ СГСМ магнитной напряженности} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{-1/2} \cdot \text{с}^{-1},$$

$$1 \text{ СГСМ магнитного потенциала} = 1 \text{ г}^{1/2} \cdot \text{см}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}.$$



Существование общей теории электромагнетизма требует пересмотра обеих этих систем, которые прежде могли оставаться совершенно независимыми. Речь идет об открытии *Эрстеда* (1820), согласно которому электрический ток всегда возбуждает магнитное поле, и об открытии *Фарадея* (1831): при изменении во времени магнитного потока возникает электрическая напряженность (а значит, и напряжение). Эти два эффекта связывают между собой магнитные и электрические величины. Связь между электрическим током и магнитным полем выражается либо через магнитное поле, охватывающее ток

$$\int \mathbf{H}_m ds = 4\pi I_m, \quad (2)$$

либо согласно закону Био — Савара, выражающему магнитное поле в центре кругового тока радиуса  $a$  как

$$H_m = \frac{2\pi I_m}{a}, \quad (3)$$

где индекс  $m$  означает, что все величины должны измеряться в магнитной системе единиц, так что здесь подлежит переопределению и сила тока (единица 1 био = 1 Би). Закон индукции гласит:

$$U_m = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (4)$$

и также требует переопределения электрического напряжения (в магнитной системе единиц).

Простое сравнение размерностей (например, электрического тока  $I_e$  и  $I_m$ ) показывает, что

$$\dim I_e = \text{масса}^{1/2} \cdot \text{длина}^{3/2} \cdot \text{время}^{-2}$$

и

$$\dim I_m = \text{масса}^{1/2} \cdot \text{длина}^{1/2} \cdot \text{время}^{-1},$$

т. е.

$$\dim I_e = \dim (\text{скорость}) \cdot \dim I_m.$$

Множитель, связывающий эти величины, точно равен скорости света  $c$ , так что

$$I_e = c I_m,$$

откуда непосредственно следует

$$Q_e = c Q_m.$$

Скорость света явно входит в уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \frac{\mathbf{j}}{c}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5)$$

обладающие волновыми решениями. Это придает глубокий смысл включению в теорию константы  $c$ , и такая формулировка урав-

нений признается целесообразной. Однако для этого в уравнениях (5) приходится использовать специфическую замену единиц, а именно здесь все электрические величины измеряются в единицах СГСЭ, все магнитные — в единицах СГСМ. Такую комбинированную систему называют *гауссовой системой единиц*. В этой системе соотношение (2) принимает новый вид <sup>1)</sup>

$$\int \mathbf{H}_m ds = \frac{4\pi}{c} I_e. \quad (6)$$

Подобным же образом из (4) следует, что

$$U_e = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi_m}{\partial t}, \quad (7)$$

и, наконец, из соотношения (3)

$$H_m = \frac{1}{c} \frac{2\pi I_e}{a}. \quad (8)$$

## 8.2. Международные единицы напряжения, силы тока и сопротивления

Выяснилось, что магнитостатические единицы сопротивления и напряжения приводят к слишком большим и поэтому неудобным числовым значениям величин, если речь идет об используемых на практике сопротивлениях и напряжениях (стр. 84). Поэтому были введены новые, более подходящие единицы, которые называются *абсолютными практическими единицами*, так как они связаны с единицами системы СГС через простые числовые множители:

$$1 \text{ вольт} = 1 \text{ В} = 10^8 \text{ СГСМ напряжения}, \quad (9)$$

$$1 \text{ ампер} = 1 \text{ А} = 1/10 \text{ СГСМ тока} = 1/10 \text{ Би}. \quad (10)$$

Однако единица «ампер» уже была определена иначе, а именно как сила такого электрического тока, который на сопротивлении 1 Ом дает падение напряжения 1 В, т. е. в основу определения был положен прототип (реализация) единицы сопротивления (Закон Ома, 1827). В конце XIX столетия уже было принято решение о реализации практических абсолютных единиц (на Международном конгрессе электриков в Чикаго в 1893 г.), и эти единицы являются так называемыми международными единицами, которые были также введены в законодательном порядке

<sup>1)</sup> Ввиду этого соотношения (что очень существенно) можно производить измерение скорости света с помощью чисто электрических и магнитных измерений.

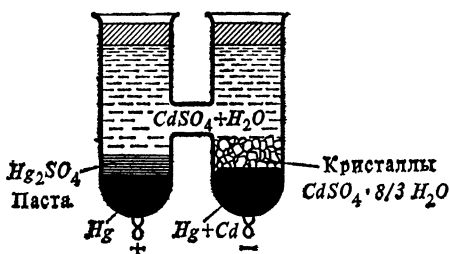


Рис. 40. Нормальный кадмиевый элемент в разрезе (высота около 10 см).

как единицы электрических измерений в Германской империи с 1 июня 1898 г. С тех пор было принято следующее:

а. *1 Ом* — электрическое сопротивление столбика ртути постоянного сечения, имеющего длину 106,300 см и массу 14,4521 г при 0°C. Принятая масса определяет сечение, равное 1 мм<sup>2</sup>, если ртуть взята как естественная смесь изотопов.

б. *1 ампер (1 А)* — сила электрического тока, который выделяет из водного раствора азотнокислого серебра 1,118 мг металлического серебра в 1 с. Тогда заряд, равный одному кулону (1 Кл), есть 1 А·1 с.

Ранее была предложена также реализация единицы напряжения 1В с помощью гальванического элемента, которая была, однако, отброшена, так как напряжение, сила тока и сопротивление связаны между собой законом Ома,  $U = I \cdot R$ , т. е. напряжение — величина производная. Тем не менее его простая реализация имеет исключительное практическое значение, так как в технике многие явления рассматриваются как обусловленные напряжением. Поэтому стандартизация напряжения и сравнение с его прототипом представляют большую важность. Для этой цели служит *нормальный кадмиевый элемент*, схема которого представлена на рис. 40. Во многих лабораториях были приложены значительные усилия, чтобы обеспечить по возможности единообразное изготовление этого элемента и как можно тщательнее исследовать все его свойства. Последнее сообщение о нормальных элементах принадлежит *Фрëлиху и Мельхерту* [41]. Особый интерес представляют их температурные свойства. При этом следует иметь в виду, что любое новое определение шкалы температуры (гл. 9) приводит к изменению значений соответствующих коэффициентов. В указанной работе приведена формула для напряжения в области температур от  $t = 0^\circ$  до  $t = 40^\circ\text{C}$  (рис. 41)

$$E_t = E_{20} + \alpha (t - 20^\circ\text{C}) + \beta (t - 20^\circ\text{C})^2 + \gamma (t - 20^\circ\text{C})^3 + \delta (t - 20^\circ\text{C})^4,$$

где

$$\alpha = -39,83 \cdot 10^{-6} \text{ В/К},$$

$$\beta = -0,93 \cdot 10^{-6} \text{ В/К}^2,$$

$$\gamma = +0,009 \cdot 10^{-6} \text{ В/К}^3,$$

$$\delta = -0,00006 \cdot 10^{-6} \text{ В/К}^4.$$

Эти данные несколько отличаются от данных для «международной температурной формулы» 1908 г., в которой

$$\alpha = -40,6 \cdot 10^{-6} \text{ В/К},$$

$$\beta = -0,95 \cdot 10^{-6} \text{ В/К}^2,$$

$$\gamma = +0,01 \cdot 10^{-6} \text{ В/К}^3, \quad \delta = 0.$$

(11)

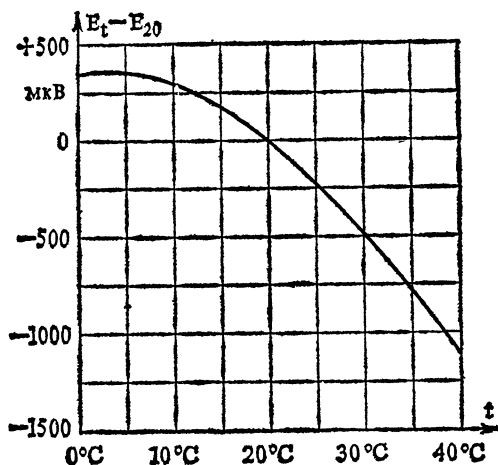


Рис. 41. Зависимость разности потенциалов  $E_t - E_{20}$  для нормального элемента от температуры согласно соотношению (11).

Исходная величина напряжения  $E_{20}$  несколько различна при разных способах приготовления элемента. В цитированной работе измерения проводились для 14 элементов, причем оказалось, что  $E_{20} = 1,018608 - 1,018644$  В. Элементы различают также по составлению электролита. В «интернациональном элементе Вестова» электролитная жидкость насыщена  $\text{CdSO}_4$ . Следует попутно упомянуть, что нормальные элементы служат только для целей сравнения, т. е. с ними сравнивают технические источники напряжения. Их нельзя использовать как источники тока (измерения в компенсационных схемах).

Приведенные выше определения и методы реализации единиц лежат в основе международной системы *ом (интерн.) — ампер (интерн.) — вольт (интерн.)*. В дальнейшем современная система МКСА именуется системой СИ. В ней также определены ампер, вольт и ом, и единицы Ом, В и А пишутся в СИ без указания «интерн.». В 1948 г. были введены, наконец, множители для перевода (безразмерные):

$$\frac{1 \text{ Ом (интерн.)}}{1 \text{ Ом (СИ)}} = 1,00049, \quad \frac{1 \text{ В (интерн.)}}{1 \text{ В (СИ)}} = 1,00034, \quad (12)$$

$$\frac{1 \text{ А (интерн.)}}{1 \text{ А (СИ)}} = 0,99985, \quad \text{погрешности} \leq 2 \cdot 10^{-5}.$$

Здесь еще следует провести некоторые расчеты для *гауссовой системы единиц*. Сравнение соотношений (6) и (2), (7) и (4) дает

$$I_m = \frac{1}{c} I_e, \quad U_m = c U_e. \quad (13)$$

Это обеспечивает также пересчет целого ряда производных величин. Мы приведем данные для некоторых важных в технике величин, пользуясь при этом определенными формулировками, которые себя хорошо зарекомендовали. Прежде всего из соотношений

(9) и (10) следует

$$\frac{U}{\text{вольт}} = 10^{-8} \frac{U_m}{\text{СГСМ}}, \text{ откуда } U = 10^{-8} \frac{\text{В}}{\text{СГСМ}} U_m; \quad (14)$$

$$\frac{I}{\text{ампер}} = 10 \frac{I_m}{\text{СГСМ}}, \text{ откуда } I = 10 \frac{\text{А}}{\text{СГСМ}} I_m. \quad (15)$$

Тогда соотношения (13) в этой записи дают

$$I_m = \frac{1}{c} \frac{\text{СГСМ}}{\text{СГСЭ}} I_e, \quad U_m = c \frac{\text{СГСМ}}{\text{СГСЭ}} U_e, \quad (16)$$

где  $c$  — безразмерное число, равное  $3 \cdot 10^{10}$ . Далее следует

$$I = \frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \frac{\text{А}}{\text{СГСЭ}} I_e, \quad U = 300 \frac{\text{В}}{\text{СГСЭ}} U_e,$$

откуда для *электрического сопротивления* получим

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10^{-8} \text{В}}{10 \text{А}} \frac{\text{СГСМ}}{\text{СГСМ}} \frac{U_m}{I_m} = 10^{-9} \frac{\text{Ом}}{\text{СГСМ}} R_m \quad (17)$$

и

$$R = 10^{-9} \frac{\text{Ом}}{\text{СГСМ}} c^2 \frac{\text{СГСМ}}{\text{СГСЭ}} U_e \frac{\text{СГСЭ}}{\text{СГСМ}} \frac{1}{I_e} = 9 \cdot 10^{11} \frac{\text{Ом}}{\text{СГСЭ}} R_e. \quad (18)$$

Аналогично для *электрической емкости* имеем

$$c = \frac{Q}{U} = \frac{10 \text{ А} \cdot \text{с}}{\text{СГСМ}} \cdot \frac{Q_m}{10^{-8} \text{В}} \frac{\text{СГСМ}}{U_m} = 10^9 \frac{\Phi}{\text{СГСМ}} C_m \quad (19)$$

и

$$C = \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \frac{\Phi}{\text{СГСЭ}} C_e. \quad (20)$$

Если теперь взять  $C = 1 \text{ пФ} = 10^{-12} \Phi$ , то  $C_e = 9 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-12} \text{ СГСЭ}$  емкости  $\approx 1 \text{ СГСЭ}$  емкости = 1 см, т. е. металлический шарик радиусом 1 см обладает в совокупности с весьма удаленным внешним шаром емкостью около 1 пФ.

Аналогично проводится расчет *индуктивности*. Мы имеем

$$L = 10^{-9} \frac{\Gamma}{\text{СГСМ}} L_m. \quad (21)$$

Из соотношения (21) следует, что для  $L = 1 \text{ нГ} = 10^{-9} \Gamma$

$$L = 1 \text{ СГСМ индуктивности} = 1 \text{ см.}$$

Наконец, для *электрической мощности* получим

$$\begin{aligned} P &= I \cdot U = 10 \frac{\text{А}}{\text{СГСМ}} I_m \cdot 10^{-8} \frac{\text{В}}{\text{СГСМ}} U_m = \\ &= 10^{-7} \frac{\text{Вт}}{\text{СГСМ} \cdot \text{СГСМ}} U_m I_m = 10^{-7} \frac{\text{Вт}}{\text{СГСМ} \cdot \text{СГСМ}} U_e I_e. \end{aligned} \quad (22)$$

Единица мощности равна  $1 \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1}$  как в магнитной, так и в электростатической системах единиц, так что

$$P = I \cdot U = 10^{-7} \frac{\text{Вт}}{\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1}} U_e I_e,$$

$$1 \text{ Вт} = 10^7 \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Мы видим, что здесь имеет место совершенно естественное согласие электростатической системы единиц с системой единиц механики, причем полагается  $1 \text{ Вт} \cdot \text{с} = 1 \text{ Дж}$ .

### 8.3. Единицы системы СИ в теории электромагнетизма

В системе СИ сила тока определяется через взаимодействие двух токов. *1 ампер есть сила не изменяющегося во времени электрического тока, который, протекая в вакууме по двум параллельным бесконечным и параллельным друг другу проводникам пренебрежимо малого круглого поперечного сечения, находящимся друг от друга на расстоянии 1 м, создает электродинамическую силу, действующую на эти проводники и равную  $2 \cdot 10^{-7}$  ньютона на каждый метр их длины (рис. 42).* Сила эта очень мала, но силы легко поддаются измерению, а, кроме того, сила может быть без труда увеличена (см. ниже).

В основе такого определения в системе СИ лежит обнаруженный Ампером факт (1820 г.), что два проводника с током действуют друг на друга с силой, изменяющей свой знак, если направление одного из токов заменить на обратное. Эта сила трактуется как результат действия магнитного поля, окружающего каждый проводник с током (закон Эрстеда), на движущиеся носители заряда в другом проводнике (так называемая сила Лоренца). Количественно величина напряженности магнитного поля записывается при этом как

$$d\mathbf{H} = \frac{I_i}{4\pi} \frac{d\mathbf{s}_i \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (23)$$

или

$$dH = \frac{I_j}{4\pi} \frac{ds_i \sin \alpha}{R^2} \quad (24)$$

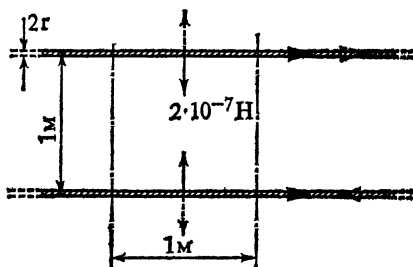


Рис. 42. К определению ампера как единицы силы тока.

Если токи текут в противоположные стороны, действует сила отталкивания (двухфазная проводка).

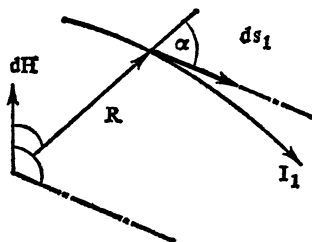


Рис. 43. Вектор магнитной напряженности направлен перпендикулярно  $\mathbf{R}$  и  $d\mathbf{s}_1$ .

(основной закон электродинамики Лапласа). Вектор  $d\mathbf{H}$  направлен перпендикулярно вектору  $\mathbf{R}$  и  $d\mathbf{s}$  (рис. 43).

Сила, действующая на элемент длины проводника  $ds_2$  в точке  $\mathbf{R}=0$ , если по этому проводнику течет ток  $I_2$ , равна

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{B} = I_2 \mu_0 d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{H},$$

откуда

$$d\mathbf{F} = I_1 I_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{s}_2 \times (d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{R})}{R^3}.$$

Пользуясь соотношением векторной алгебры  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ , получим

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left[ \mathbf{R} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{R^3} - d\mathbf{s}_1 \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right]. \quad (25)$$

Заслугой Максвелла было обнаружение фундаментальной важности процедуры, которая дополняет систему токов до *замкнутого контура с током*. Это значит, что соотношение (25) можно применять лишь в форме

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \left[ \mathbf{R} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{R^3} - d\mathbf{s}_1 \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{R}}{R^3} \right]. \quad (26)$$

Из простых примеров явствует, что вторая часть этого выражения не дает никакого вклада при интегрировании, и это можно доказать в общем случае (см., например, [42, 43]). В результате выражение для силы взаимодействия двух токов записывается в виде

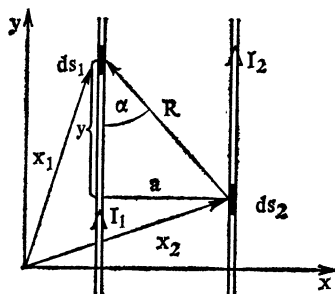
$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint \oint \mathbf{R} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{R^3}. \quad (27)$$

Оно выводится не дифференциальным путем, а чаще как следствие выражения для энергии системы проводников с током [44]

$$W_{\text{магн}} = W_{\text{магн}}(I_1, I_2, a_1, a_2, \dots), \quad (28)$$

где  $a_i$  — параметры, определяемые расположением проводников, т. е., например, расстояние между двумя параллельными друг другу прямолинейными проводниками или угловая ориента-

Рис. 44. К выводу пондеромоторной силы между двумя параллельными проводниками с токами.



ция малой пробной катушки по отношению к однородному магнитному полю другой катушки, создающей поле. Это выражение для магнитной энергии можно записать для случая  $n$  контуров с токами как

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n L_{ik} I_i I_k, \quad (29)$$

где коэффициенты  $L_{ik}$  — взаимные индуктивности контуров (при  $i=k$  это коэффициенты самоиндукции),

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{ds_i \cdot ds_k}{r_{ik}}. \quad (30)$$

Упомянутые выше параметры  $a_i, a_2, \dots$  вошли теперь в выражения для взаимных индуктивностей. Компонента силы относительно параметра  $a_i$  равна  $dW_m/da_i$ .

Применим формулу (27) для определения силы, действующей между двумя параллельными проводниками, находящимися на расстоянии  $a$  друг от друга (рис. 44). Имеем

$$ds_1 \cdot ds_2 = ds_1 ds_2; \quad \mathbf{R} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2,$$

так что сила в направлении  $\mathbf{a}$  равна

$$|\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int ds_2 \int ds_1 \frac{\sin \alpha}{R^2}.$$

Учитывая, что  $R^2 = y^2 + a^2$  и  $ds_1 = dy$ , найдём

$$|\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int ds_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy a (a^2 + y^2)^{-3/2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int ds_2 \frac{2}{a}.$$

Таким образом, сила пропорциональна длине проводника  $l_2 (=l)$ , а величина силы, приходящаяся на единицу длины проводника, равна

$$\frac{|\mathbf{F}|}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{a}. \quad (31)$$



По определению единицы СИ получим для  $I_1 = I_2 = 1$  А и  $a = 1$  м величину  $|F|/l = 2 \cdot 10^{-7}$  Н·м<sup>-1</sup>, так что из выражения (31) одновременно с определением единицы 1 А следует, что

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} \quad (32)$$

Таким образом, константа  $\mu_0$  уже не является предметом экспериментального определения. После того как определена сила тока, определяется и заряд с помощью соотношения  $Q = S \int dt$ , так что  $\dim Q = (\text{сила тока} \cdot \text{время})$  и  $[Q] = 1$  А·с. Эта единица равна точно 1 Кл, а тем самым оказывается, что в законе Кулона

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

диэлектрическая постоянная вакуума  $\epsilon_0$  осталась единственной величиной, подлежащей экспериментальному определению. Но, с другой стороны, имеется еще одно важное соотношение, включающее  $\mu_0$  и  $\epsilon_0$ . Это выражение для скорости света в вакууме:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

Если бы требовалось задавать величину скорости света с помощью определения (гл. 5), то тем самым значение диэлектрической постоянной  $\epsilon_0$  уже нельзя было бы устанавливать экспериментально — она имела бы по определению совершенно конкретное значение <sup>1)</sup>. Этот факт с полной ясностью показывает, что введение новых элементов в системы единиц должно сопровождаться тщательным анализом всех вытекающих из этого последствий.

Из выражения (30) можно, наконец, рассчитать значения индуктивности, а потом из производных  $\partial W_m / \partial a$  — и величину действующей силы. Расчет  $L$  следует проводить в два приема: рассматривать по отдельности самоиндукцию проводников (интегрирование по внутренней части провода) и взаимную индуктивность. Если радиус проводников  $r_D$  мал по сравнению с расстояниями между ними  $a$ , то

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{a}{r_D}$$

( $r_D \ll a$ ) и

$$W_m = \frac{\mu_0}{2\pi} l I_1 I_2 \ln \frac{a}{r_D}.$$

<sup>1)</sup> Из значений  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  В·с/А·м и  $c = 299792458$  м/с следует  $\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 = 8,854196 \cdot 10^{-12}$  А·с/В·м.

Действующую силу находят путем дифференцирования этого выражения по параметру  $a$ :

$$\frac{F}{l} = \frac{1}{l} \frac{\partial W_m}{\partial a} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{1}{a},$$

что находится в согласии с выражением (31).

При реализации единицы 1 А (путем измерения силы) пользуются двумя установками. Во-первых, измеряют силу, действующую на малую катушку в однородном магнитном поле, и, во-вторых, измеряют момент силы, действующий на малую катушку с током.

#### 8.4. Реализация единицы 1 А с помощью силы, действующей на катушку с током [45, 46], «взвешивание» токов по Рэлею [47]

Внутри большой фиксированной катушки с отводом от среднего витка обмотки (рис. 45) длиной 27,5 см и диаметром 46 см (установка Национального бюро стандартов США) или длиной 50 см и диаметром 27,5 см (установка Немецкого бюро по контролю за материалами и товарами, ГДР) помещается «измерительная катушка», на которую действует подлежащая измерению сила. Измерительная катушка также ориентирована вертикально и имеет длину 2,6 см и диаметр 24,5 см (или длину 12 см и диаметр 20 см). Число витков большой катушки равно 344 (или 453), малой — 41 (или 130). Измерительная катушка подвешена к коромыслу чувствительных аналитических весов. Электрическая

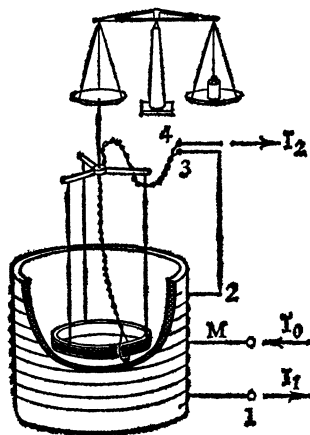


Рис. 45. Схема установки для «взвешивания» тока Дрисколла и Кутковского.

цепь системы собрана таким образом, что подводимый к отводу от среднего витка большой катушки ток делится на две равные части и в противоположных направлениях протекает через верхнюю и нижнюю половины катушки. При этом часть тока, обозначенная  $I_2$ , проходит и через измерительную катушку. Картину

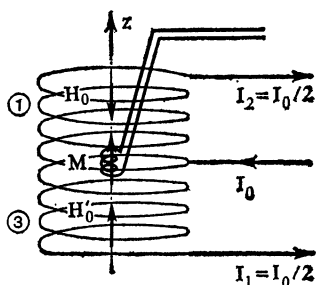


Рис. 46. Схема обмоток и полей к рис. 45.

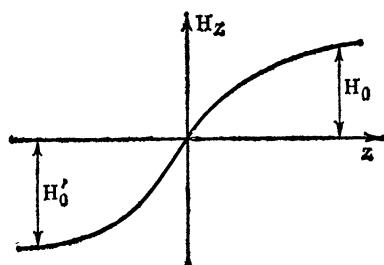


Рис. 47. Поведение вертикальной компоненты  $H_z$  магнитного поля в установке, изображенной на рис. 45 и 46 (качественно).

взаимодействия тогда можно представить себе следующим образом. В половинах большой катушки 1 и 2 возникают противоположно направленные магнитные поля ( $H_0$  и  $H'_0$ , рис. 46). В плоскости симметрии (при  $z=0$ ) вертикальная составляющая поля отсутствует. Поведение вертикальной составляющей поля вдоль оси  $z$  имеет тогда вид графика на рис. 47. При  $z=0$  *градиент* напряженности отличен от нуля. Так как у измерительной катушки, если в ней течет ток  $I_2$ , имеется магнитный момент  $M$ , то возникает вертикально направленная сила

$$F = M \left. \frac{\partial H}{\partial z} \right|_0,$$

действующая на эту катушку и измеряемая весами. Для расчета величины этой силы воспользуемся соотношением (27). Вертикаль-

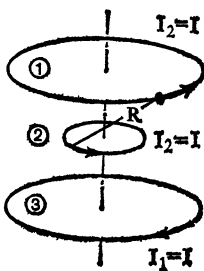
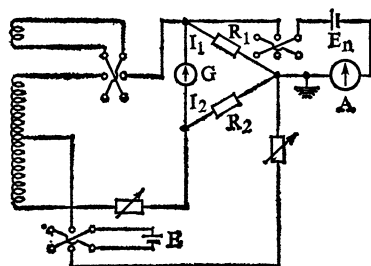


Рис. 48. К расчету величины силы в установке, изображенной на рис. 46.

Рис. 49. Схема переключений для измерения силы взаимодействия между двумя токами.

А и G — индикаторы нуля.



но направленная сила между обмотками 1 и 2 (рис. 48) равна

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1^2 \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos(ds_1 ds_2)}{R^2}.$$

Сила между обмотками 2 и 3 действует в том же направлении, т. е. абсолютные значения обеих сил складываются. Следует сложить друг с другом силы, действующие между каждой парой соответствующих витков. Если  $N_1$  — полное число витков неподвижной катушки,  $N_2$  — число витков измерительной катушки, то

$$F = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} N_1 N_2 I^2 f(d, D),$$

где  $d$  и  $D$  — диаметры катушек,  $f$  — некоторая эллиптическая функция. Этот расчет, проведенный Сноу [48] (см. также [42]), дает в сущности взаимную индуктивность системы двух катушек. В нем фигурирует параметр  $z$  и, согласно соотношениям (29) и (30),

$$\frac{\partial W_m}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right) = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Собственно измерения проводятся в соответствии со схемой переключений (рис. 49; см. [45]). Источник напряжения  $E$  дает с помощью реостатов и стабилизирующего устройства постоянный ток  $I$ . Сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  одинаковы, так что отклонение стрелки гальванометра равно нулю при  $I_1 = I_2$ . С помощью нормального элемента  $E_n$  падение напряжения на  $R_1$  может быть измерено абсолютно, откуда следует и абсолютная величина тока  $I_1 (=I_2)$ , т. е. мы опираемся в первую очередь на стандарт напряжения в виде нормального элемента. При определенном таким образом токе  $I$  аналитические весы уравниваются с помощью разновесов. Затем меняют направление тока и одновременно увеличивают (или уменьшают) уравнивающий груз, следя при этом за тем, чтобы снимаемый или добавляемый разновес был близок по своему весу к изменению величины силы.

Показания стрелки весов дают остальные дробные части изменения силы.

В работе [45] использовался нормальный элемент, калиброванный в единицах Национального бюро стандартов США (НБС), подводимый ток равнялся примерно 1 А, а действующая сила составляла 0,014 Н. Так удалось осуществить «сравнение амперов» и получить

$$1 \text{ А (НБС)} = (1,000008 \pm 0,000006) \text{ А.}$$

Относительная точность составила  $6 \cdot 10^{-6}$ . В работе [46] совершенно аналогичным образом было проведено сравнение 1 А Немецкого бюро по контролю за материалами и товарами (НБКМТ) и 1 А СИ (при токе около 1 А сила была равна 0,066 Н) с результатом

$$1 \text{ А (НБКМТ)} = (1,0000018 \pm 0,000008) \text{ А.}$$

Мы видим, что здесь также производится лишь сравнение с некоторым независимо создаваемым «лабораторным» током, как и в случае использования нормального элемента.

### 8.5. Представление единицы 1 А с помощью момента силы, действующего на катушку с током

Данная установка также восходит к прошлому (так называемые весы Гельмгольца [49]) и используется также в процессе преподавания физики при демонстрациях напряженности магнитного поля, создаваемого катушкой. Как видно из рис. 50 [50], используется фиксированная длинная катушка 1 (длиной около 100 см, диаметром 28 см), в которой монтируются передвижные весы с измерительной катушкой 2. Ось измерительной катушки направлена перпендикулярно оси фиксированной катушки. Диаметр измерительной катушки составляет 11,6 см при длине 25 см.

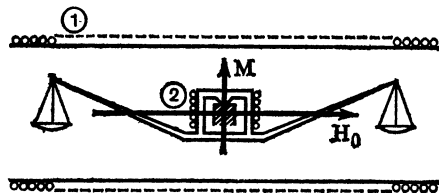


Рис. 50. Установка для «взвешивания» тока в варианте Дрисколла.

метр измерительной катушки составляет 11,6 см при длине 25 см.

В принципе ток, проходящий через фиксированную катушку 1, создает направленное по горизонтали магнитное поле  $H_0$ , в то время как у измерительной катушки имеется магнитный момент. Это вызывает появление момента силы  $D = M \cdot H_0$ , который и подлежит измерению. Его также можно рассчитать, исходя

из взаимной индукции. Магнитная энергия, описываемая выражением (29), зависит от угла поворота  $\alpha$  внутренней измерительной катушки, причем

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = D = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial \alpha}.$$

Пользуясь той же схемой подключения, что и изображенная на рис. 49, добиваются того, чтобы токи, текущие через катушки 1 и 2, были равны и постоянны во времени, а при изменении направления одного из токов на обратное одновременно перемещают разновесы. Момент силы выражается как

$$D = \mu_0 N_1 N_2 I^2 f(d_1, d_2, L),$$

где  $L$  — длина катушки 1, а  $d_1$  — ее диаметр. Диаметр измерительной катушки равен  $d_2$ , а ее длина в выражение для момента силы не входит. В установке Дрисколла [50]  $N_1 = 1000$ ,  $N_2 = 140$  (числа витков). Геометрический множитель  $f$  снова связан главным образом с взаимной индуктивностью. При силе тока 1 А для компенсации возникающего момента силы требовался разновес с массой около 1,5 г. С помощью таких весов вновь производилось сравнение между 1 А НБС и 1 А СИ, которое привело к результату

$$1 \text{ А НБС} = 1,000013 \text{ А}$$

с относительной погрешностью  $8 \cdot 10^{-6}$ , несколько превышающей погрешность в предыдущем методе. Национальное бюро стандартов США приняло в качестве средней величины 1,000010 А.

## 8.6. Джозефсоновский контакт как стандарт напряжения

*Эффект Джозефсона* является типичным эффектом сверхпроводимости, он возникает лишь при очень низких температурах (несколько градусов Кельвина) [51—53]. Этот эффект был предсказан и измерен для соединения пары сверхпроводников, разделенных тонким (около 1 нм) слоем изолятора; это соединение носит название контакта Джозефсона. Через контакт может течь постоянный ток (при силе тока менее некоторой определенной величины) при отсутствии падения напряжения на контакте, а при отличном от нуля падении напряжения на контакте имеет место переменный ток высокой частоты. Его частота определяется величиной падения напряжения. Таким образом, эффект Джозефсона дает возможность свести измерение напряжения к измерению частоты, которое можно проводить с очень высокой точностью.

На рис. 51 дана схема джозефсоновского контакта. На изолирующую подложку (например, стеклянную пластинку площадью  $2 \times 2 \text{ см}^2$ ) наносятся четыре индиевых контакта. Сначала напыляется узкая полоска сверхпроводящего материала (например, олова) между точками 1 и 4. Поверхность этой полоски окисляется (образуется  $\text{SnO}$ ). Поверх нее напыляется вторая полоска из того же материала (между точками 2 и 3). Их пересечение и образует «контакт». Точки подсоединения 1 и 2 используются для подведения тока, а 3 и 4 — для измерения напряжения (без расхода тока).

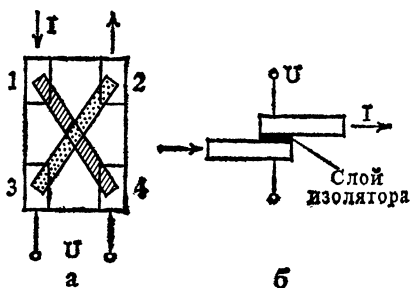


Рис. 51. Схема контакта Джозефсона.

Контакт подключается согласно схеме, представленной на рис. 52. Если сопротивление  $R$  велико, то мы имеем дело практически с источником постоянного тока, сила которого определяется величиной  $U_0$ . При увеличении напряжения  $U_0$  от нуля в контакте Джозефсона наблюдается все возрастающий «ток сверхпроводимости» без появления падения напряжения на контакте ( $U=0$ ) (рис. 53). Лишь после достижения максимального значения тока сверхпроводимости  $I_s$  на контакте возникает падение

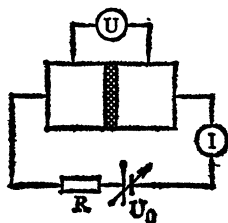


Рис. 52. Схема подключения контакта Джозефсона.

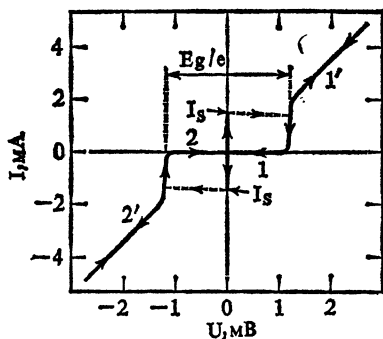


Рис. 53. Вольтамперная характеристика сверхпроводящего контакта.

напряжения  $U \neq 0$ , и ток перескакивает на характеристическую линию 1—1' (при учете падения напряжения  $I \cdot R$ ). Максимальная величина тока сверхпроводимости составляет несколько десятков миллиампер. Если снова уменьшить  $U_0$ , ток пойдет по кривой 1'—1, так что имеет место явление гистерезиса. Картина повторяется при изменении направления тока на обратное (обращение знаков  $U_0$ ,  $I_s$ ; ток идет по кривой 2—2'). Для сверхпроводящего контакта характерны наличие тока сверхпроводимости и пороговое напряжение  $E_g/e$ , где  $E_g$  — так называемая запрещенная зона, представляющая собой важнейшую характеристику в явлении сверхпроводимости. В табл. 4 приведены некоторые данные о сверхпроводниках. Ширину запрещенной зоны можно измерить путем возбуждения поверхностной фотопроводимости.

Таблица 4

## Характеристики некоторых сверхпроводников

Материал	Температура перехода в сверхпроводящее состоя- ние, К	$E_g$ , мэВ
Hg	4,15	1,65
Nb	9,1	3,05
Ta	4,48	1,40
Sn	3,72	1,15
Al	1,18	0,34
Pb	7,19	2,67
In	3,41	1,05

Длина волны требующегося для этого излучения находится из равенства  $1 \text{ мэВ} = h\nu$  и равна  $\lambda = 1,25 \text{ мм}$ , т. е. лежит в далекой инфракрасной области.

Согласно предсказанию Джозефсона, при  $U \neq 0$  в контакте должен возникать переменный ток высокой частоты [частота  $\nu = (2e/h)U$ ].

Эта частота, как правило, очень высока, так как  $2e/h \approx 500 \text{ ТГц/В}$ , однако при  $U = 10 \text{ мкВ}$  она лежит в легко достижимом диапазоне нескольких гигагерц. Рассматриваемый эффект может быть обнаружен и сделан доступным для измерения, если поместить контакт в поле высокой частоты микроволнового волновода. Тогда наблюдается характерный ход зависимости ток — напряжение со ступенчатым увеличением тока при росте напряжения на дискретные значения  $\Delta U$ , которые зависят от частоты микроволнового поля  $\nu_M$  таким образом, что  $\nu_M = 2e\Delta U/h$ . Это значит, что всякий раз, когда напряжение достигает величины, при которой частота переменного тока эффекта Джозефсона



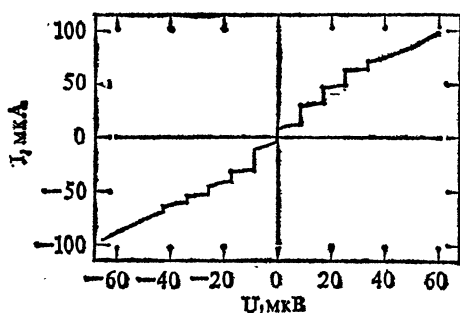


Рис. 54. Ступенчатый ход вольтамперной характеристики контакта Джозефсона при температуре 3,04 К и облучении высокочастотным полем 4 ГГц.

является целой кратной по отношению к частоте микроволнового излучения, возникает добавочный постоянный ток, дающий скачок на графике. На рис. 54 приведены первые результаты, полученные Шануро [54] на контакте Sn—SnO—Sn и явившиеся блестящим подтверждением предсказания Джозефсона.

Для объяснения эффекта Джозефсона необходимо привлечь теорию сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера, согласно которой в области

сверхпроводимости электроны, способные дать вклад в ток, попарно связаны друг с другом (куперовские пары). В этих парах спины электронов антипараллельны, а импульсы их равны по величине и обратны по направлению. Такая конфигурация энергетически выгоднее, чем при отсутствии связи между импульсами. Куперовские пары являются носителями тока сверхпроводимости.

Все куперовские пары находятся в одном и том же квантовомеханическом состоянии, так что вся система этих пар в целом может быть описана единой волновой функцией. Если рассматривать квадрат амплитуды волновой функции как плотность куперовских пар  $n_C$ , то волновой функции системы куперовских пар можно придать вид  $\psi = \sqrt{n_C} \exp i\varphi$ , где  $\varphi$  — фаза волновой функции. Это совершенно аналогично описанию электромагнитного поля, состоящего из множества квантов; оно также представляется как единая волна.

В случае джозефсоновского контакта существуют две системы куперовских пар, которые разделены изолятором. Изолятор играет роль потенциального барьера для носителей заряда, однако через него может протекать ток вследствие туннельного эффекта, если изолирующий слой достаточно тонок. Такой туннельный ток может быть образован отдельными электронами, но они появляются только при распаде куперовских пар (т. е. после преодоления упоминавшейся выше запрещенной зоны шириной  $E_g$ ). Следующим шагом будет (и это нас интересует здесь в особенности) переход куперовских пар через слой изолятора (туннельный ток куперовских пар). На квантовомеханическом языке об этом последнем случае можно сказать, что имеет место взаимодействие между обеими системами куперовских пар, обусловленное обменом отдельными парами. Это значит (как можно видеть из квантовомеханических расчетов [55]), что между двумя соответствующими волновыми функциями имеется постоянный сдвиг фазы, что как раз и соответствует току пар. Если фазы волновых функций равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то ток сверхпроводимости равен

$$I = I_s \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = I_s \sin \Delta\varphi,$$

где  $I_s$  — максимальный ток, определяемый силой взаимодействия.

Если к контакту приложено напряжение  $U$ , то между двумя куперовскими системами возникает различие в энергиях  $\Delta E = 2eU$ , отвечающее по правилам квантовой механики разности частот  $\Delta\nu = 2eU/h$ . Колебания в каждой из двух куперовских систем происходят с вполне определенной, но различной частотой. Благодаря взаимодействию разность фаз (как и в случае связан-

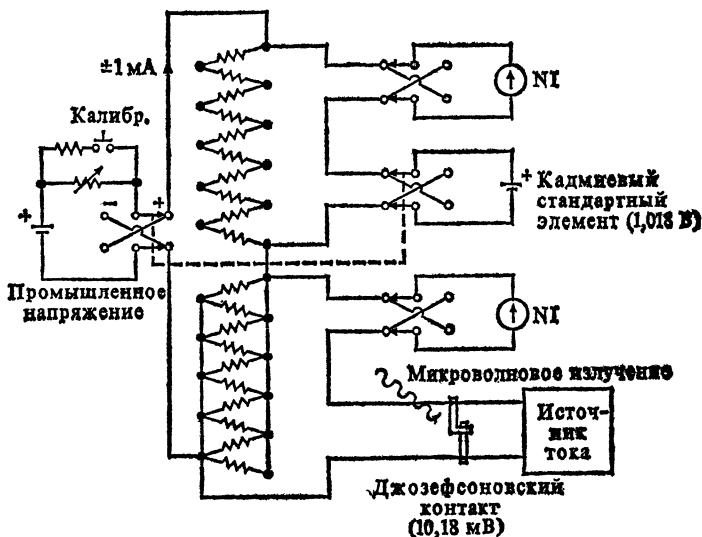


Рис. 55. Упрощенная схема переключений для сравнения разности потенциалов нормального элемента и контакта Джозефсона.

NI — индикатор нулевого тока.

ных маятников) изменяется линейно со временем,

$$\Delta\varphi = 2\pi\Delta v t = 2\pi \frac{2eU}{h} t,$$

так что

$$I = I_s \sin \left( 2\pi \frac{2eU}{h} t \right),$$

вследствие чего возникает высокочастотный переменный ток. Из этих рассуждений также следует, что при прохождении куперовской пары через изолирующий слой должен поглощаться или излучаться фотон с энергией  $\hbar\Delta v = 2eU$ .

Джозефсоновские контакты могут использоваться для реализации стандарта напряжения. В принципе  $e$  и  $h$  — мировые постоянные, а сам контакт — преобразователь напряжения в частоту. При измерении частоты достигается абсолютное определение приложенного напряжения — абсолютное в том смысле, что оно опирается на мировые постоянные. При первоначальных измерениях была вновь определена величина  $2e/h^1$ ). Выраженная через единицу 1 В (НБС), она оказалась равна

$$\frac{2e}{h} = 483,5976 \frac{\text{ТГц}}{\text{ВНБС}}$$

<sup>1)</sup> См. работу [25], где содержится подробный критический обзор данных о многих мировых постоянных. Более свежие данные см. в работах [56] и [37] (выдержки откуда приведены в Приложении III).

при относительной погрешности  $2,4 \cdot 10^{-6}$ . В работе Филда, Финнегана и Тутса [57] описана установка Национального бюро стандартов США, использованная для этих целей.

Был взят контакт  $\text{Pb—PbO—Pb}$  на стеклянной подложке. На рис. 55 дана схема цепи, использованной для сравнения напряжений. Все напряжения сравнивались методом компенсации (указатель нулевого тока с усилителем и гальванометром в позиции  $NI$ ). Большой делитель напряжения служит для установления возможно более точного отношения долей напряжения  $100 : 1$  (с отдельными резисторами, которые должны быть весьма близки по величине). Сообщалось, что с января по июль 1972 г. было получено значение

$$\frac{2e}{h} = 483,593420 \pm 0,000019 \frac{\text{ТГц}}{\text{Внбс}}$$

(с относительной погрешностью  $0,04 \cdot 10^{-6}$ ). Таким образом, единицу 1 В теперь можно определять с точностью около  $10^{-8}$ , и к тому же мы имеем в своем распоряжении сравнительно просто транспортируемую установку. Вполне можно надеяться, что в будущем система базисных единиц будет заново пересмотрена, если удастся доказать исключительную стабильность и легкую воспроизводимость джозефсоновского контакта.

### 8.7. Реализация производных электрических единиц

Реализация производных электрических единиц имеет важное значение для практики. Особенно ценна она в тех случаях, когда величины, о которых идет речь, определяются главным образом геометрическими характеристиками. В особенности это касается *индуктивности*. Ее определяют через выражение, которое устанавливает связь между магнитным потоком через контур 1 (индекс  $k$ ) и током в контуре 2 (индекс  $i$ ),

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^n L_{ik} I_i, \quad k = 1, \dots, n,$$

или в частном случае, когда  $n=2$ ,

$$\Phi_1 = L_{11} I_1 + L_{12} I_2, \quad \Phi_2 = L_{21} I_1 + L_{22} I_2$$

( $L_{11}$  и  $L_{22}$  — коэффициенты самоиндукции,  $L_{12} = L_{21}$  — коэффициент взаимной индукции).

Согласно официально принятому определению, замкнутый виток, по которому течет ток силой 1 А, обладает индуктивностью 1 генри (1 Г), если он охватывает при этом в вакууме магнитный поток величиной в 1 вебер = 1 тесла  $\cdot$  1 м<sup>2</sup> = 1 В  $\cdot$  с.

Таким образом, поток через контур 1 (рис. 56) равен составляющей векторного потенциала вдоль окружающей его кривой, проинтегрированной вдоль этой кривой, т. е.

$$\phi_1 = \mu_0 \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1.$$

Этот векторный потенциал  $\mathbf{A}$  создается током в контуре 2:

$$\mathbf{A} = I_2 \int \frac{d\mathbf{s}_2}{r},$$

так что сохраняет силу равенство

$$\mu_0 I_2 \int \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r} = L_{12} I_2,$$

причем

$$L_{12} = \mu_0 \int \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r}.$$

Поэтому индуктивность определяется лишь геометрическим расположением проводников (множитель  $\mu$  — магнитная восприимчивость — входит сюда, если проводники погружены в намагничиваемую среду). Для контуров с током, обладающих простой геометрией, например для точно вымеренных цилиндрических катушек, относительная точность достигает  $1-2 \cdot 10^{-6}$ .

Аналогично можно получить реализацию *емкости*, определяемую одной только геометрией. Она определяется соотношением

$$C = \frac{Q}{U},$$

где  $Q$  — заряд системы проводников, находящихся под напряжением  $U$ . Официально принятое определение гласит: емкость конденсатора равна 1 фараде (1 Ф), если при заряде 1 Кл этот конденсатор приобретает разность потенциалов 1 В. Дело в том, что заряд  $Q$  и поток напряженности электрического поля через охватывающую его замкнутую поверхность связаны между собой соотношением

$$Q = \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A},$$

а разность потенциалов (напряжение) равна интегралу  $\int U \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ , взятому вдоль кривой, соединяющей проводники. В простых случаях величину емкости  $C$  можно рассчитать непосредственно

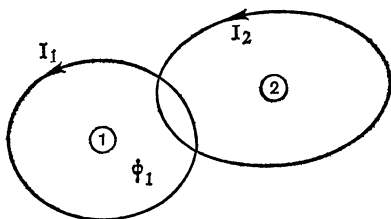


Рис. 56. К определению индуктивности.

как

$$C = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} / \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s},$$

например для плоского конденсатора  $C = \epsilon_0 A/d$ , где  $d$  — расстояние между его пластинами. В настоящее время удается достигнуть точности около  $2 \cdot 10^{-7}$  при определении величины напряженности поля, а значит, и рассчитать с такой же точностью величину емкости.

Наконец, для реализации единицы *сопротивления* можно использовать также метод переменного тока, если применить в

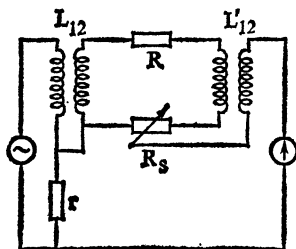


Рис. 57. Сравнение индуктивностей с электрическим сопротивлением.

качестве сопротивления сравнения индуктивность  $(\omega L)$ . На рис. 57 приведена схема мостика Кемпбелла, для которого условие равенства токов имеет вид

$$R \cdot r = \omega^2 L_{12} L'_{12}.$$

В качестве  $r$  берется стандарт сопротивления 1 Ом, индуктивность которого мала. Коэффициент взаимной индукции  $L_{12}$  и  $L'_{12}$  можно подобрать на основании указанного выше метода. С помощью другой мостиковой схемы можно определить отношение  $q = r/R$ . Таким образом, производится два независимых измерения, с помощью которых можно определить абсолютные значения сопротивлений  $r$  и  $R$ . В результате мы приходим к соотношению

$$r = 2\pi\nu \sqrt{q L_{12} L'_{12} (1 + k)},$$

где  $k$  — добавочная поправка, предназначенная для учета зависимости сопротивления  $R$  от частоты. Относительная точность при определении ома составляет  $2 \cdot 10^{-8}$ . Подобным же образом можно рассматривать и емкости.

Понятие температуры возникло из ощущения «теплого» и «холодного» состояния тела. В основе ощущения этого состояния лежал тот наблюдательный факт, что два соприкасающихся тела по прошествии некоторого времени становятся одинаково теплыми, т. е. принимают одинаковую температуру.

В отличие от измерения длины, веса и времени прошло длительное время, пока на смену субъективным впечатлениям при определении температуры не пришли точные и единые методы измерений. Развитие методов измерения температуры стало возможным лишь тогда, когда были установлены такие свойства тел, которые зависят от температуры (длина, объем и т. д.) и которые можно было измерить объективно. Количественные методы измерения температуры начали развиваться в XVII столетии; первые попытки унифицировать эти измерения относятся к 1887 г., т. е. приблизительно через столетие после введения метра в качестве единого эталона длины.

Наряду с этим развивалось само понятие температуры от субъективных впечатлений «тепло» и «холодно» до современного понимания термодинамической температуры, которая как «интегрирующий множитель», ведущий к энтропии, играет основополагающую роль. Для нужд термодинамики необходимо было ввести понятие еще одной базисной величины — температуры. На практике она измеряется термометрами и задается в градусах. Опытные данные и теоретические представления показывают, что существует точка абсолютного нуля температуры, и поэтому для установления градуса температуры необходима еще только одна точка. В соответствии с этим в 1967 г. XIII Генеральная конференция по мерам и весам постановила:

*1 кельвин составляет  $1/273,16$  часть термодинамической температуры тройной точки воды.*

Эта единица обозначается К. Допускается также особое обозначение для кельвина — градус Цельсия (пишется °C). Разность температур теперь уже обозначается не град или град<sup>-1</sup> (последнее — для величин типа термодинамического коэффициента расширения), а К или К<sup>-1</sup>.

### 9.1. Эволюция понятия температуры на раннем этапе [59]

Попытки наглядного представления температурных изменений (охлаждения и нагревания) известны еще с древности. *Филон Византийский* (300 г.) и *Герон Александрийский* (130 г.) использовали для этой цели термическое расширение воздуха. На рис. 58 изображен эскиз термоскопа Герона. Шаровой сосуд, заполненный водой и воздухом, выставляется под лучи солнца. Воздух расширяется и вытесняет воду из сосуда. Вода попадает в резервуар и после охлаждения вновь поднимается по вертикальной трубке в сосуд. Таким образом, вытеснение воды означает нагревание.

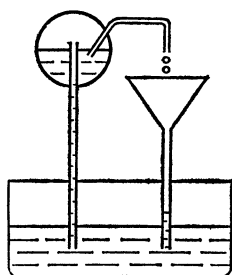


Рис. 58. Термоскоп Герона Александрийского.

В 1592 г. Галилей вновь использовал этот принцип: в его термоскопе (рис. 59) по высоте водяного столба можно судить о том, является температура высокой или низкой. О применении такого прибора для измерения температуры воды упомянуто в 1611 г. На

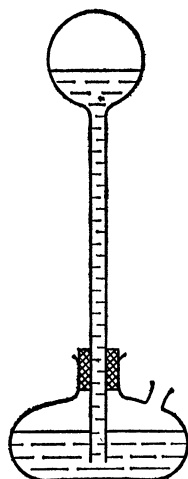


Рис. 59. Термоскоп Галилея.

основании теплового расширения жидкостей в 1657 г. во Флоренции был создан термометр, наполненный спиртом. При этом было замечено, что можно пренебречь малыми температурными изменениями материала термометра, так как газы обладают наибольшим тепловым коэффициентом расширения.

### 9.2. Определение температуры по Амонтону

При использовании эмпирических методов, как это делалось раньше, понятие температуры оставалось неясным. Лишь развитие учения о теплоте в начале XVIII в. дало первый толчок к пониманию этого вопроса. *Бойль* в 1662 г. и независимо *Мариотт* в 1676 г. установили взаимосвязь между давлением и объемом газа при постоянной температуре (закон Бойля — Мариотта:  $p \cdot V = \text{const}$  при  $T = \text{const}$ ). Затем в 1704 г. *Амонтонс* обнаружил, что в Париже давления газа при «наибольшей летней жаре» и «наибольшем зимнем холоде» относятся как 6 : 5 [60]. Он предложил определить температуру таким образом, чтобы отношение двух

температур равнялось отношению соответствующих давлений, т. е.  $p \sim T$ . Он установил также, что с уменьшением до нуля газового давления температура должна стремиться к нулю — раннее указание на существование точки абсолютного нуля <sup>1)</sup>).

### 9.3. Температурные шкалы Фаренгейта, Реомюра и Цельсия [60]

Однако идея определения температуры путем измерения давления газа не получила в то время распространения. Вместо газовых стали использоваться жидкостные термометры и подходящие для них температурные шкалы. Было установлено, что определенные процессы в одних и тех же условиях всегда протекают при одинаковых температурах, например таяние льда или кипение воды при постоянном давлении. Такие состояния вещества, в которых разные фазы при постоянной температуре находятся в равновесии друг с другом, принимаются в качестве *опорных* точек. Их удобно использовать в качестве калибровочных точек для температурной шкалы. Температурная шкала жидкостного термометра задается следующим образом: отмечается высота столба жидкости в двух опорных точках и полученный промежуток делится определенным образом. Разность между двумя соседними отметками обозначается «град» (или короче °).

В 1714 г. *Фаренгейт* ввел для сконструированного им спиртового термометра шкалу, в которой он, следуя идее *Рёмера*, в качестве опорных точек выбрал температуру таяния льда и температуру человеческой крови. Этот температурный интервал был разделен на 64 части, а нулевая точка помещалась ниже точки таяния льда на расстоянии, равном половине этого интервала; в то время это была наиболее низкая из известных температур, она получалась путем смешивания нашатыря и смеси вода — лед. Таким образом, температура таяния льда имела значение 32°F, а температура человеческой крови — значение 96°F. В дальнейшем Фаренгейт перешел к ртутному термометру и выбрал в качестве верхней опорной точки точку кипения воды, для которой, сохраняя первоначальную шкалу, было установлено значение 212°F.

Другая температурная шкала была введена *Реомюром* в 1730 г. В качестве опорных точек он выбрал точки таяния льда и кипения воды. Точке таяния льда он приписал значение 0°R. Свой термометр он наполнил смесью спирт — вода, которая меж-

<sup>1)</sup> Согласно закону идеального газа, отношению давлений  $p_{\text{летн}}: p_{\text{зимн}} = 6:5$ , измеренному Амонтонсом, при заданной наинизшей температуре  $t = -15^\circ\text{C}$  соответствует самая высокая температура  $t = 37^\circ\text{C}$ .



ду двумя опорными точками расширяется на 8% (что соответствует коэффициенту объемного расширения  $\alpha \approx 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ). За  $1^\circ\text{R}$  он принял температуру, соответствующую расширению жидкости на  $1\text{‰}$ <sup>1)</sup>, поэтому температура кипения воды получила значение  $80^\circ\text{R}$ .

Решающий шаг в будущее был сделан *Цельсием* (1742 г.). Он предложил разделить интервал между точками таяния льда и кипения воды на 100 градусов. Первоначально он придал точке таяния льда значение  $100^\circ\text{C}$ , а точке кипения воды —  $0^\circ\text{C}$ ; используемое в наше время обратное обозначение было введено позднее *Штрёмером*.

Принцип жидкостных термометров сохранился по сей день: в качестве рабочего вещества используется ртуть или этиловый спирт, а при низких температурах — пентан. Их коэффициенты объемного расширения значительно больше, чем у материала, из которого сделан термометр (стекло) (табл. 5).

Таблица 5

**Коэффициент расширения  $\alpha$   
различных веществ  
для термометров при  $20^\circ\text{C}$**

Вещество	$\alpha, \text{K}^{-1}$
Этиловый спирт	$1,10 \cdot 10^{-3}$
Пентан	$1,58 \cdot 10^{-3}$
Ртуть	$1,82 \cdot 10^{-4}$
Стекло	$\sim 4 \cdot 10^{-6}$

Незначительное расширение жидкостей (ртуть между  $0^\circ\text{C}$  и  $100^\circ\text{C}$  расширяется на  $5\text{‰}$ , этиловый спирт — на  $7\text{‰}$ ) становится заметным, если наблюдать движение столбика жидкости в капилляре, из которого откачан воздух и который соединен с (большим) резервуаром, содержащим рабочую жидкость. Поэтому условием высокой точности термометра является неизменный диаметр капилляра. Источником ошибок служат термические свойства стекла (смещение нулевой точки вследствие упругого последствия в результате нагревания, процессы кристаллизации).

К существенным недостаткам жидкостных термометров относится зависимость показаний от рабочего вещества. У термометров с различными жидкостями, прокалиброванных в опорных точках, высота поднятия столбиков жидкости в капиллярах при одинаковых температурах различна вследствие разных зависимостей коэффициентов расширения от температуры (нелинейность термического расширения). Так, в спиртовом термометре по сравнению с ртутным интервал между  $0^\circ\text{C}$  и  $100^\circ\text{C}$  необходимо

<sup>1)</sup>  $\text{‰}$  — промилле — тысячная доля. — *Прим. перев.*

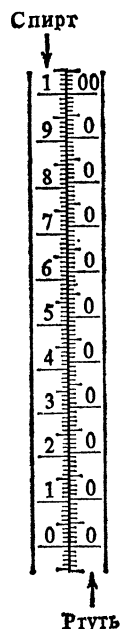


Рис. 60. Сравнение шкал ртутного и спиртового термометров [61].

делить неравномерно (рис. 60). По этой причине жидкостные термометры не годятся для определения понятия температуры, так как бессмысленно базисную величину делать зависимой от свойств определенного вещества.

#### 9.4. Температурная шкала Цельсия для идеального газа

Исследования теплового расширения газов, проведенные к началу XIX в., в особенности эксперименты *Гей-Люссака* (1802—1816), выявили преимущества газов в качестве рабочих веществ для термометров, а также позволили сделать новые шаги на пути к выяснению понятия температуры. Законы Гей-Люссака описывают зависимость объема газа от температуры при постоянном давлении и зависимость давления газа от температуры при постоянном объеме:

$$V_t = V_0 (1 + \alpha (t - t_0)), \quad p = \text{const};$$

$$p_t = p_0 (1 + \beta (t - t_0)), \quad V = \text{const}.$$

Если взять за основу температурную шкалу Цельсия, то  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Величина  $\alpha$  — *коэффициент объемного расширения* — у газов значительно больше, чем у жидкостей и твердых тел;  $\beta$  — *коэф-*

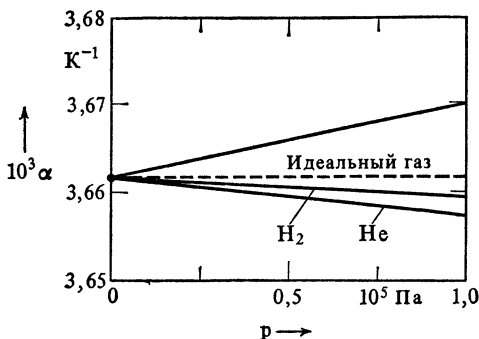


Рис. 61. Зависимость усредненных коэффициентов расширения различных газов от давления [62].

коэффициент давления. Из закона Бойля — Мариотта следует, что для газов коэффициент давления  $\beta$  должен равняться коэффициенту объемного расширения  $\alpha$ . Эксперименты показывают, что для всех газов в интервале температур от  $0^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$  средние коэффициенты объемного расширения почти одинаковы. Различия будут тем меньше, чем ниже давление (рис. 61). В предельном случае  $p=0$  (экстраполяция ряда измерений) для всех газов получаем

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1} = 0,003661 \text{ K}^{-1}.$$

Газ, находящийся в таком предельном состоянии, называется *идеальным газом*.

Тот факт, что численное значение коэффициента расширения для всех газов в предельном случае малых давлений одинаково, позволяет, очевидно, на основе теплового расширения газов определить температурную шкалу. Приняв за основу температурную шкалу Цельсия, можно определить температуру идеального газа с помощью соотношения

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \beta t,$$

где  $p_0$  — давление в опорной точке  $t=0^\circ\text{C}$ . С помощью второй опорной точки  $t=100^\circ\text{C}$  определяется коэффициент пропорциональности, являющийся коэффициентом давления  $\beta$  для  $p$  относительно  $0^\circ\text{C}$ . Для этого используется предельный случай предыдущего соотношения:

$$\beta = \frac{p(100^\circ\text{C}) - p(0^\circ\text{C})}{100^\circ\text{C} \cdot p(0^\circ\text{C})}, \quad \text{причем } V(100^\circ\text{C}) = V(0^\circ\text{C}).$$

Таким образом, температурная шкала Цельсия устанавливается на основе теплового расширения идеальных газов между двумя опорными точками.

## Закон Гей-Люссака

$$p_t = p_0 (1 + \beta t) = p_0 \beta (\beta^{-1} + t) = p_0 \beta (273,15^\circ\text{C} + t)$$

убеждает нас в том, что предполагал еще *Амонтонс*: при температуре  $t = -273,15^\circ\text{C}$  следует ожидать, что давление  $p = 0$ . Это приводит нас к определению абсолютной температуры  $T = t + \beta^{-1}$  нулевое значение которой соответствует  $t = -273,15^\circ\text{C}$ . Следовательно, абсолютная температура таяния льда равна  $T_0 = \beta^{-1} = -273,15^\circ\text{C}$  (здесь используется новое обозначение градуса Кельвина К, хотя исторически оно было введено позднее). Таким образом, абсолютная температура в этом определении является производной величиной, зависящей от температуры Цельсия и от экспериментально определяемого значения  $\beta$ , которое задается лишь с точностью от 0,01 до 0,02  $\text{K}^{-1}$ . По этой причине до 1954 г. температуре  $T_0$  приписывалось значение от 273,14 до 273,18 К.

Оказывается, однако, что абсолютная температура как одна из производных величин имеет фундаментальное значение.

а. Путем комбинирования законов Гей-Люссака и Бойля — Мариотта и подстановки  $T = t + T_0$  получается уравнение состояния идеального газа

$$\frac{pV}{T} = \text{const}, \text{ или } pV_m = R \cdot T,$$

где  $V_m$  — молярный объем (разд. 7.3), а  $R$  — универсальная газовая постоянная. Отсюда видно, почему абсолютная температура  $T$  наряду с давлением, объемом и количеством вещества является существенной величиной для описания состояния идеального газа.

б. Абсолютная температура идентична термодинамической температуре, которая выводится из второго начала (стр. 109). Ввиду того что термодинамическая температура оказывается независимой от вещества, эта идентичность оправдывает использование идеального газа в качестве рабочего вещества (газовый термометр). При этом достигается цель, состоящая в получении определения температуры, не зависящего от вещества.

## 9.5. Термодинамическое определение температуры

Развитие термодинамики в середине XIX столетия позволило дать новое, не зависящее от вещества определение температуры.

Карно в 1824 г. теоретически разработал идеальную тепловую машину, которая позволяла получать из тепла механическую работу в процессе обратимых (циклических) изменений состояния рабочего вещества. Изменение состояния называется цикличе-

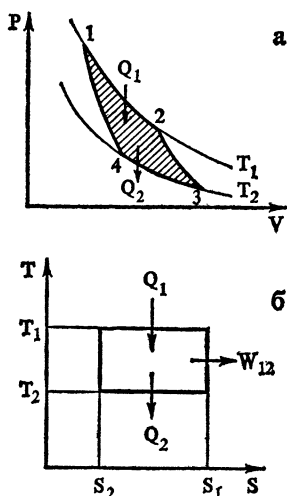


Рис. 62. Круговой процесс Карно.

ским в том случае, если возможно осуществить процесс приведения в исходное состояние всех компонентов этой системы. Это условие означает, что система проходит исключительно состояние равновесия; понятно, что это идеальный случай, к которому можно приблизиться лишь при очень медленных изменениях величин, характеризующих состояние (потери за счет трения исключаются). Работа машины Карно осуществляется с помощью двух тепловых резервуаров<sup>1)</sup> с температурами  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Вначале рабочее вещество находится в тепловом контакте с нагревателем, имеющим температуру  $T_1$ , и совершает изотермическую работу, в результате которой оно получает от нагревателя количество теплоты  $Q_1$ . Затем совершается адиабатическая работа, при которой рабочее вещество охлаждается до температуры  $T_2$ . При контакте с холодильником, имеющим температуру  $T_2$ , рабочее вещество совершает изотермическую работу и при этом отдает холодильнику количество теплоты  $Q_2$ . Наконец, рабочее вещество совершает адиабатическую работу, в процессе которой оно снова нагревается до температуры  $T_1$ . В итоге в работу переходит количество теплоты  $Q_1 - Q_2$ ; согласно первому началу термодинамики, имеем  $W_{12} = Q_1 - Q_2$ . Рис. 62 иллюстрирует циклический процесс на  $p$ — $V$ -диаграмме идеального газа. Ограниченная площадь соответствует работе  $W_{12}$ . Более общим представлением является диаграмма «энтропия — температура» ( $T$ — $S$ -диаграмма). В рассмотренном нами обратимом процессе его адиабатические составляющие ( $dQ=0$ ) являются изэнтропами ( $dS = dQ/T = 0$ ).

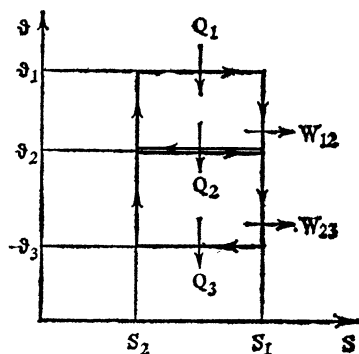
Карно установил, что *существенно не все* количество теплоты  $Q_1$ , отнятое у нагревателя в обратимом процессе, может превратиться в механическую работу. Карно принадлежит теорема о том, что коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{W_{12}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

зависит только от  $T_1$  и  $T_2$  и не зависит от природы рабочего вещества. Не существует машины, которая имела бы к. п. д. больший, чем задаваемый этими двумя температурами. Это утверж-

<sup>1)</sup> Нагревателя и холодильника.— *Прим. перев.*

Рис. 63. Совмещение двух процессов Карно,



дение является *одной* из формулировок второго начала термодинамики. *Томсон* (лорд Кельвин) высказал это следующим образом: не существует такого термодинамического периодического изменения состояния, единственный результат которого состоял бы в том, что отнятое у теплосборника количество тепла полностью переходило в работу. Формулировка второго начала, предложенная *Клаузиусом* (1850), относится к обратному процессу Карно, т. е. к холодильной машине или к тепловому насосу: не существует термодинамического изменения состояния, единственный результат которого состоял бы в том, что количество теплоты, отнятое у более холодного тела, передалось более теплomu. Чтобы такой процесс осуществился, необходимо совершить дополнительную работу. Второе начало термодинамики, так же как и первое (энергетическое), сформулировано на основе опыта. Исходя из этих начал, можно доказать теорему Карно.

С помощью того факта, что коэффициент полезного действия цикла Карно зависит лишь от температуры, а не от рабочего вещества, *Томсон* в 1848 г. сумел определить понятие термодинамической температуры, которая не зависит от свойств отдельных термометров. Покажем это с помощью следующих рассуждений [63].

Обозначим через  $\vartheta$  температурную шкалу, для которой примем лишь, что она однозначна и что  $\vartheta_1 > \vartheta_2 > \vartheta_3$ . Проведем последовательно два процесса Карно (рис. 63), причем таким образом, чтобы количество теплоты  $Q_2$ , которое подводится к резервуару  $\vartheta_2$ , сразу же отнималось у него за счет второго процесса. Тогда получим следующие соотношения:

$$\eta_1 = \frac{W_{12}}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - f(\vartheta_1, \vartheta_2),$$

$$\eta_2 = \frac{W_{23}}{Q_2} = 1 - \frac{Q_3}{Q_2} = 1 - f(\vartheta_2, \vartheta_3),$$

а также

$$\eta_{13} = \frac{W_{12} + W_{23}}{Q_1} = 1 - \frac{Q_3}{Q_1} = 1 - f(\vartheta_1, \vartheta_3).$$

Из этих соотношений следует

$$f(\vartheta_1, \vartheta_3) = f(\vartheta_1, \vartheta_2)f(\vartheta_2, \vartheta_3). \quad (1)$$

После логарифмирования и частного дифференцирования по  $\vartheta_1$  получаем

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \ln f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \ln f(\vartheta_1, \vartheta_3).$$

Отсюда видно, что должно выполняться равенство

$$\ln f(\vartheta_1, \vartheta_j) = A(\vartheta_1) + B(\vartheta_j),$$

так что

$$f(\vartheta_1, \vartheta_j) = a(\vartheta_1)b(\vartheta_j).$$

Подставив это в соотношение (1), имеем

$$a(\vartheta_2) = \frac{1}{b(\vartheta_2)},$$

поэтому функцию  $f$  можно записать вполне однозначно, а именно:

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{b(\vartheta_2)}{b(\vartheta_1)}.$$

Теперь выражение для коэффициента полезного действия машины Карно имеет вид

$$\eta = 1 - f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{b(\vartheta_1) - b(\vartheta_2)}{b(\vartheta_1)},$$

а это означает, что  $Q_2/Q_1 = b(\vartheta_2)/b(\vartheta_1)$ . Отсюда заключаем, что, установив начальную температуру  $\vartheta_1$  и измерив  $\eta$ , можно экспериментально определить функцию  $b(\vartheta)$ . Далее мы утверждаем, что  $b(\vartheta)$  должно быть абсолютной температурой  $T$ , и выбираем скалярный коэффициент таким образом, чтобы температура тройной точки воды принимала значение  $T_0 = 273,16$  К, как уже было сказано раньше. Это и есть термодинамическая температурная шкала. Как следствие этого получаем равенство  $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$  и приведенную выше формулу для коэффициента полезного действия Карно  $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ , но теперь уже в виде определяющего выражения для термодинамической температуры.

Раньше мы определили идеальный газ как «идеальный предельный случай» реальных газов. Для них выполняется эмпирическое уравнение состояния

$$pV = \nu RT^*,$$

где  $\nu$  — число молей в данной массе газа,  $T^*$  — температура, устанавливаемая с помощью коэффициентов расширения и поэтому для отличия от термодинамической температуры помеченная звездочкой. При помощи этого рабочего вещества можно рассчитывать отдельные этапы цикла Карно, причем для этого первое начало следует записывать в форме

$$dQ = dU + p dV.$$

Здесь  $dQ$  представляет собой количество теплоты, сообщаемое газу или отнимаемое у него. Внутренняя энергия зависит только от температуры:

$$dU = \nu C_V dT,$$

где  $C_V$  — молярная теплоемкость. Вычисляя отдельные процессы  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 4$ ,  $4 \rightarrow 1$  (рис. 62), получаем

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2^* \ln(V_3/V_4)}{T_1^* \ln(V_2/V_1)} = \frac{T_2^*}{T_1^*},$$

так как для адиабатического изменения состояния выполняется соотношение  $V_3/V_4 = V_2/V_1$ . Но такое соотношение выполняется и при термодинамических температурах, так что  $T$  и  $T^*$  пропорциональны друг другу. Константа пропорциональности приравнивается единице.

*Дополнение: процесс Стирлинга.* Процесс Карно — не единственный обратимый круговой процесс с к. п. д.  $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$ . Таким же к. п. д. обладает процесс Стирлинга, лежащий в основе воздушного двигателя и газовой холодильной машины Филиппа. В этом круговом процессе (рис. 64) между изотермическим расширением при  $T_1$  и изотермическим сжатием при  $T_2$  происходят

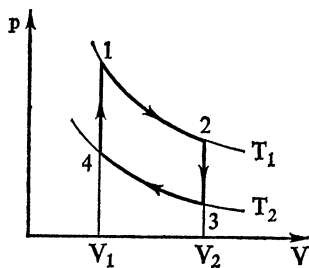


Рис. 64.  $p - V$ -диаграмма процесса Стирлинга для идеального газа.

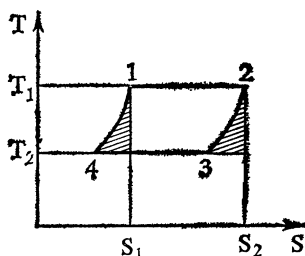


Рис. 65.  $T - S$ -диаграммы процессов Карно и Стирлинга.

два *изохорических* изменения состояния. В ходе первого изохорического этапа рабочее вещество (рассматривается идеальный газ), имеющее объем  $V_2$ , охлаждается от  $T_1$  до  $T_2$ , при этом оно с помощью вытеснителя проходит через регенератор без изменения объема ( $2 \rightarrow 3$ ) и отдает определенное количество теплоты. В течение обратного изохорического этапа ( $4 \rightarrow 1$ ) то же самое коли-



чество теплоты при объеме  $V_1$  выделяется из регенератора через вытеснитель и расходуется на нагревание рабочего вещества от  $T_2$  до  $T_1$ . В отличие от процесса Карно, в котором в соответствующих фазах (адиабаты) теплота не подводится и не отнимается, здесь теплота отдается, накапливается и затем снова поглощается. Как и в процессе Карно, к. п. д. определяется лишь количеством теплоты  $Q_1 = \nu R T_1 \ln(V_2/V_1)$ , поглощаемым при температуре  $T_1$ , и количеством теплоты  $Q_2 = \nu R T_2 \ln(V_2/V_1)$ , отдаваемым при температуре  $T_2$ , т. е. для идеального газа

$$\eta_{\text{Стирлинг}} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\nu R (T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}}{\nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_{\text{Карно}}.$$

Этот факт можно пояснить с помощью  $T-S$ -диаграммы (рис. 65). Площадь, соответствующая работе, совершаемой в ходе процесса Стирлинга, равна площади прямоугольника на диаграмме процесса Карно, так как изохоры на  $T-S$ -диаграмме представлены одинаковыми экспоненциальными функциями, которые параллельно сдвинуты вдоль оси  $S$  (заштрихованные площади равны). При обратимом ходе процесса выполняется равенство

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\nu C_V dT}{T} + \frac{p dV}{T} = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V};$$

при этом для изохорического этапа ( $dV=0$ )

$$S - S_2 = \nu C_V \ln(T/T_1).$$

Другими словами, для процесса  $2 \rightarrow 3$

$$T = T_1 \exp[(S - S_2)/\nu C_V]$$

и для процесса  $4 \rightarrow 1$

$$T = T_1 \exp[(S - S_1)/\nu C_V].$$

Таким образом, если в процессе Стирлинга подводится такое же количество теплоты  $Q_1$ , что и в процессе Карно, то совершается такая же по величине работа, и к. п. д. обоих процессов равны.

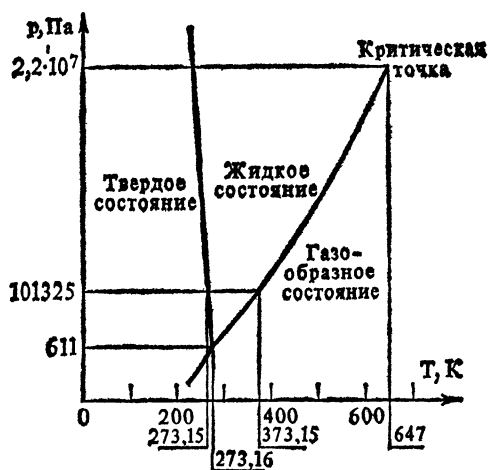
На основании соотношения

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

вытекающего из процесса Карно, температура определяется с точностью до произвольного множителя. Томсон, исходя из пропорциональности газотермометрической и термодинамической температур, которая существует всегда, так определяя этот множитель, чтобы обе эти температуры совпадали <sup>1)</sup>. Он потребовал, чтобы разность термодинамических температур между точками замерзания и кипения воды составляла 100 градусов. Однако при определении с помощью этих двух опорных точек недостаток состоит в том, что точность абсолютной газотермометрической и соответственно термодинамической температуры зависит от экс-

<sup>1)</sup> Следует отметить, что все эти рассуждения относятся к идеальному газу.

Рис. 66. Диаграмма состояний воды (масштаб не соблюден).



периментального определения коэффициента расширения ( $T_0 = = \alpha^{-1} = 273,15$  град).

Хотя на основе предыдущего соотношения напрашивается мысль о том, чтобы, как это уже было предложено *Амонтоном*, определять значение температуры *одной* опорной точки (вторая — точка абсолютного нуля), такое определение температуры было введено лишь почти через 100 лет [64]. X Генеральная конференция по мерам и весам в 1954 г. постановила: термодинамическая температура тройной точки воды содержит точно 273,16 кельвин (К). Название этой единицы было введено в честь Томсона (лорда Кельвина).

*Тройная точка* воды — это такая точка на диаграмме состояния, в которой жидкое, твердое и газообразное агрегатные состояния вещества одновременно находятся в равновесии друг с другом. Диаграмма состояния воды изображена на рис. 66. Здесь приведены три агрегатных состояния, или *фазы*. Согласно правилу фаз Гиббса  $f = c - p + 2$ , которое описывает связь между числом степеней свободы  $f$  системы (числом независимо выбираемых переменных), числом фаз  $p$  и числом компонент  $c$ , для чистой воды ( $c = 1$ ) число степеней свободы  $f = 3 - p$ . При наличии *одной* фазы можно свободно выбрать две переменные, например давление и температуру. Если в равновесии находятся *две* фазы ( $p = 2$ ), то  $f = 1$ , т. е. для произвольно выбранной температуры существует лишь одно определенное значение давления, при котором система находится в равновесии. Этот случай иллюстрируется кривыми на диаграмме состояния, которые делят всю область на твердую, жидкую и газообразную фазы (кривая давления пара, кривая сублимации, кривая таяния). В точке пересечения трех кривых

существуют все три фазы ( $p=3$ ), так что система не имеет больше степеней свободы ( $f=0$ ). При изменении переменной нарушается равновесие системы. Три фазы могут одновременно существовать только при совершенно определенных значениях давления и температуры; для воды эти значения суть  $p=611$  Па ( $\underline{1}$ ) 4,58 торр) и  $T=273,16$  К (по определению). С другой стороны, при одновременном существовании трех агрегатных состояний мы всегда имеем одну и ту же температуру. В противоположность этому при задании, например, температуры кипения или плавления нам всегда необходимо задавать соответствующее давление. Воспроизводимые состояния равновесия между фазами чистых веществ принимаются в качестве опорных точек. Тройная точка воды выбрана из тех соображений, что ее можно легко получить и воспроизвести в температурном интервале меньше миллиградуса.

*Точка заморзания воды* при нормальном давлении ( $p=101325$  Па  $\underline{1}$  760 торр  $\underline{1}$  1 атм) расположена ниже тройной точки воды примерно на 0,00993 град. В пределах экспериментальной точности она не отклоняется от использовавшегося ранее значения температуры точки заморзания; по этой причине нулевая точка шкалы Цельсия составляет по определению  $T_0=273,15$  К. Определяемая с такой же точностью точка кипения воды при нормальном давлении составляет 373,15 К, хотя при более точных измерениях она может несколько отклониться от этого значения (см. стр. 136).

Установление температуры  $T_0$  позволяет дать новое *термодинамическое определение температуры Цельсия*. Ввиду того что  $t=T-T_0$ , температура Цельсия является производной величиной.

XIII Генеральная конференция по мерам и весам в 1967 г. впервые дала определение температурной шкалы и определила единицу температуры как  $1/273,16$  часть тройной точки воды.

## 9.6. Статистическое определение температуры [60]

Развитие кинетической теории газов, осуществленное Кренигом и Клаузиусом (1857) и исследования Максвелла (1859) и Больцмана (1868), посвященные распределению молекул по скоростям и энергиям в термодинамическом равновесии, привели к молекулярной интерпретации термодинамической температуры. Согласно этой интерпретации, температура представляет собой параметр, характеризующий энергетическое распределение молекул системы.

<sup>1)</sup>  $\underline{1}$  — знак соответствия. — Прим. перев.

Эта интерпретация была усовершенствована благодаря развитой *Гиббсом* (1902) статистической механике. Гиббсу удалось установить каноническое распределение вероятностей для энергии системы. При этом в качестве параметра выступает величина  $\Theta$ , которая через постоянную Больцмана  $k$  связана с термодинамической температурой:

$$\Theta = kT.$$

Тем самым была установлена связь между статистической и термодинамической температурами. Это соответствие позволяет с помощью статистической механики вычислить, например вириальные коэффициенты, необходимые для описания некоторого реального газа (газотермометрическое измерение с помощью реального газа). Уравнение состояния реальных газов можно представить в виде следующего разложения в ряд:

$$p \cdot V_m = RT \left( 1 + \frac{B(T)}{V_m} + \frac{C(T)}{V_m^2} + \dots \right),$$

где вириальные коэффициенты  $B(T)$ ,  $C(T)$  представляют собой функции температуры, вытекающие из теории.

## 9.7. Газотермометрические измерения

Согласно термодинамическому определению температуры, для измерения температур нужно использовать цикл Карно; при этом измерение температур сводится к измерению количеств теплоты. Однако таким путем нельзя получить удовлетворительной точности. Более точным является определение термодинамической температуры с помощью газовых термометров, что допустимо ввиду эквивалентности термодинамической и газотермометрической температур.

Как уже было сказано, газотермометрическая температура следует из уравнения состояния. Но поскольку для измерений используется реальный газ, необходима коррекция с помощью вириальных коэффициентов. Если при этом учитывать только второй вириальный коэффициент  $B(T)$  и применять упрощенную формулу

$$pV = \nu RT \left( 1 + \nu \frac{B(T)}{V} \right),$$

то вириальный коэффициент можно легко определить экспериментальным путем. Для этого измеряются связанные друг с другом значения  $p$ ,  $V$  и  $T$  и затем для постоянной температуры определяется величина  $pV/\nu RT$  как функция от  $1/V$ : наклон получающейся прямой и дает значение вириального коэффициента при

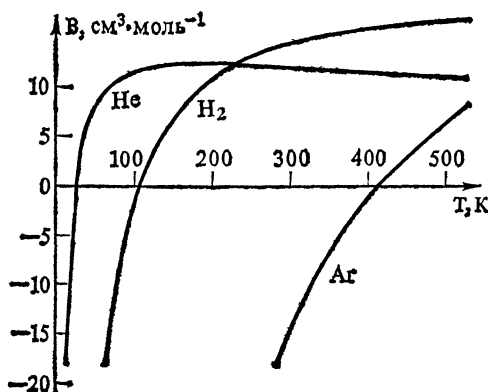


Рис. 67. Температурная зависимость второго вириального коэффициента для некоторых газов.

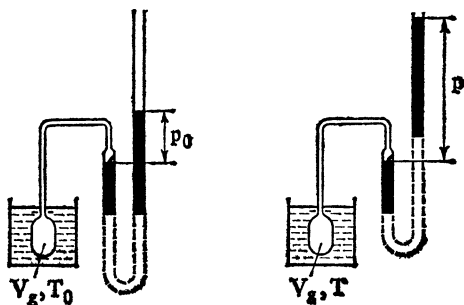
данной температуре. Повторяя эксперимент при других температурах, мы получим ход функции  $B(T)$ . Некоторые примеры приведены на рис. 67.

В принципе газовый термометр представляет собой сосуд, в котором заключен газ (преимущественно азот, аргон или гелий, термические свойства которых хорошо известны), имеющий постоянную массу (или, что равносильно, постоянное количество молей). Состояние газа подвергается изменениям. В соответствии с уравнением состояния при заданной температуре газ под определенным давлением занимает определенный объем. Изменение температуры влечет за собой изменения давления и/или объема, с помощью которых оно измеряется. Вместо того чтобы определять температуру абсолютным образом из уравнения состояния, ее измеряют относительно некоторой точки отсчета, т. е. искомое состояние определяется относительно состояния, например при температуре тройной точки воды. Как и в процессе Карно, здесь получается отношение двух температур. В основном используются следующие три метода.

### 9.7.1. Газовый термометр постоянного объема

При  $V_g = \text{const}$  имеем  $T = T_0(p/p_0)$ . Давление, под которым газ в термометре находится в состояниях с температурами  $T$  и  $T_0$ , измеряется ртутным манометром, причем ртутный столб одновременно используется для поддержания постоянного объема (рис. 68).

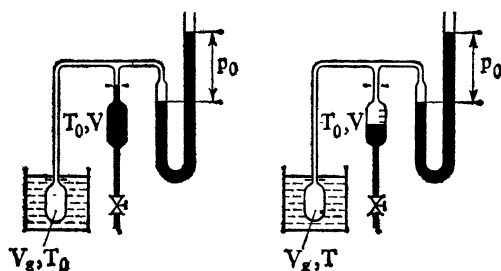
Рис. 68. Принцип действия газового термометра постоянного объема.



### 9.7.2. Газовый термометр постоянного давления

При начальной температуре  $T_0$  газ под давлением  $p_0$  имеет объем  $V_g$ . Если резервуар термометра довести до измеряемой температуры  $T > T_0$ , то для обеспечения постоянного давления расширение газа производится в дополнительный, проградуированный объем  $V$  (вытеснение ртути) (рис. 69). После прекращения

Рис. 69. Принцип действия газового термометра постоянного давления.



повышения температуры в объеме  $V_g$  будет содержаться  $\nu_1$  молей, а в объеме  $V$  (дополнительном) —  $\nu_2$  молей, причем

$$\nu_1 = \frac{p_0 V_g}{RT} \quad \text{и} \quad \nu_2 = \frac{p_0 V}{RT_0}.$$

Так как полное количество вещества остается постоянным, то  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ , причем  $\nu$  определяется из начального состояния:

$$\nu = \frac{p_0 V_g}{RT_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{p_0 V_g}{RT} + \frac{p_0 V}{RT_0} = \frac{p_0 V_g}{RT_0},$$

откуда измеряемая температура

$$T = T_0 \frac{V_g}{V_g - V}.$$

### 9.7.3. Газовый термометр постоянной температуры

Недостаток обоих предыдущих методов состоит в том, что при нагревании резервуара термометра до температуры  $T$  газ из стенок выделяется в измеряемый объем (десорбция), искажая результаты измерения. При высоких температурах этот факт становится весьма существенным источником ошибок. В противоположность этому в газовых термометрах постоянной температуры <sup>1)</sup> (рис. 70) сначала устанавливается равновесие (измеряемый объем  $V_g$  при температуре  $T$ , измерительный прибор при температуре  $T_0$ ), а затем измеряется температура. При этом газ расширяется в проградуированный объем  $V$  (дифференциальный манометр ДМ поддерживает давление).

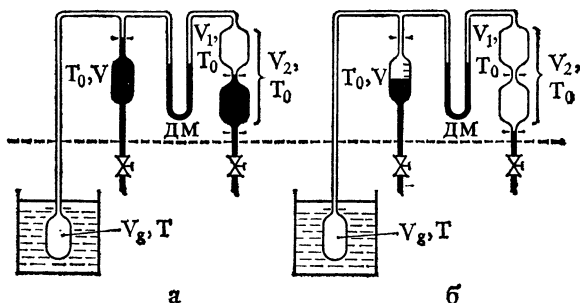


Рис. 70. Принцип действия газового термометра постоянной температуры (ДМ — дифференциальный манометр).

Температура  $T$  вычисляется следующим образом. При расширении газа в объем  $V$  вспомогательный объем одновременно увеличивается от  $V_1$  до  $V_2$ . Во вспомогательном объеме, согласно закону Бойля — Мариотта, устанавливается давление

$$p = \frac{V_1}{V_2} p_0 \quad (T_0 = \text{const}).$$

Для того чтобы и газ находился под тем же давлением, дифференциальный манометр ДМ должен обеспечивать нулевую разность давлений. Количество молей газа остается постоянным,

<sup>1)</sup> С современными газовыми термометрами можно ознакомиться, например, в работах [65, 66].

следовательно,

$$\frac{p_0 V_g}{RT} = \frac{p V_g}{RT} + \frac{p V}{RT_0},$$

или

$$\frac{V_g}{T} + \frac{V}{T_0} = \frac{p_0}{p} \frac{V_g}{T} = \frac{V_2}{V_1} \frac{V_g}{T},$$

так что

$$T = T_0 \frac{V_g}{V} \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right).$$

При известных  $V_g$ ,  $V_1$  и  $V_2$  температура определяется из значения объема  $V$ , в который расширяется газ. Температура отсчета  $T_0$  задается с помощью предварительного испытания, когда резервуар термометра имеет температуру тройной точки воды.

Наряду с указанной уже ошибкой, вызываемой поглощением газов, существуют и другие источники ошибок, которые нужно тщательно учитывать (за исключением неидеальности газа):

- 1) соединительные трубки имеют собственные объемы, в которых температура не определяется;
- 2) расширение резервуара термометра под влиянием нагревания и давления изменяет объем газа;
- 3) диффузия газов.

## 9.8. Другие термометры для измерения термодинамической температуры

Наряду с измерением термодинамической температуры при помощи газовых термометров существуют и другие методы, которые применяются особенно в области низких и высоких температур.

### 9.8.1. Акустический термометр [67]

Как оказывается, скорость звука в идеальных газах зависит от термодинамической температуры:

$$c_0 = \sqrt{\frac{C_p}{C_v} \frac{RT}{M}}. \quad (1)$$

Здесь  $C_p/C_v$  — экстраполированное к  $p=0$  значение отношения теплоемкостей (для одноатомных газов  $C_p/C_v = 5/2$ ),  $M$  — молярная масса (см. стр. 71). Для реальных газов существует модифи-



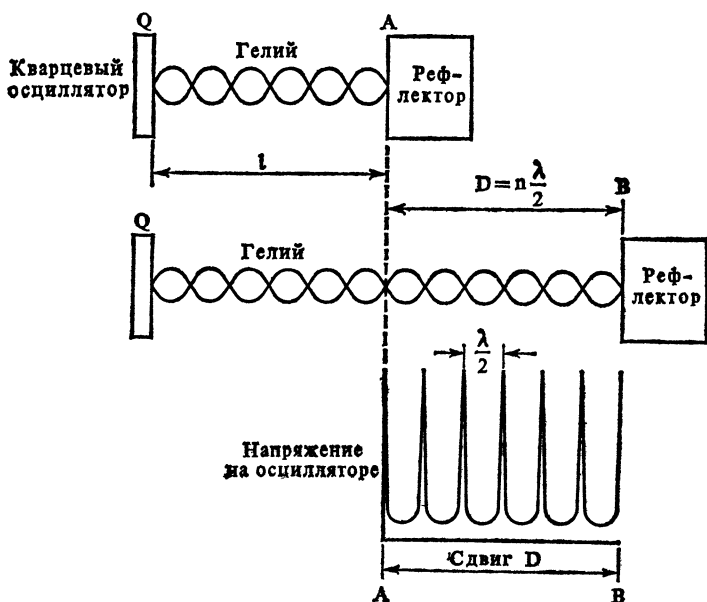


Рис. 71. Принципиальная схема для измерения длины звуковой волны с помощью акустического термометра.

цированная формула, вытекающая из уравнения состояния:

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{B(T)}{V_m} + \frac{C(T)}{V_m^2}}. \quad (2)$$

На практике определяется предельное значение для  $p \rightarrow 0$ ; при этом измеряются частота  $f$  и длина волны  $\lambda$  звуковых колебаний как функции давления при температуре, которую нужно измерить ( $p$  должно быть достаточно низким). Ультразвуковые колебания кварцевого осциллятора приводят в колебание газовый столб (аналогично трубке Кундта) (рис. 71), причем длина  $l$  газового столба делается такой, чтобы можно было получить стоячие волны [это осуществляется при  $l = m(\lambda/2)$ ]. При помощи соответствующей электрической схемы добиваются того, чтобы образование стоячей волны позволило получить максимальный сигнал напряжения. Затем измеряют длины волн, для чего производят конечное смещение  $D$  рефлектора и подсчитывают число максимумов напряжения. Произведение  $c = \lambda \cdot f$  представляет собой скорость звука, с помощью которой из выражения (1) или (2) определяется температура. Для точного измерения сдвига  $D$  можно использовать оптический интерферометр. Этот термометр применяется преимущественно в области температур от 2 до 20 К.

### 9.8.2. Термометр с насыщенным паром

Ввиду того что при низких температурах все газы в конце концов сжимаются, а давление пара сильно зависит от температуры, его можно использовать для измерения температуры, причем в тех температурных областях, где сосуществуют жидкая и газовая фазы. Например, для гелия такая область расположена ниже 5,2 К (критическая температура;  $p_{\text{крит}} = 2,39 \cdot 10^5 \text{ Па} \cong \cong 2,26 \text{ атм}$ ). Связь между давлением пара (давление насыщения)  $p$  и температурой  $T$  для давлений ниже 1,013 бар можно в хорошем приближении вывести из уравнения Клаузиуса — Клапейрона

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \frac{Q}{V_{\text{пар}} - V_{\text{жидк}}}, \quad (3)$$

где  $Q$  — молярная теплота парообразования (см. стр. 15),  $V_{\text{пар}}$  и  $V_{\text{жидк}}$  — молярные объемы пара и жидкости. Как правило, пар можно считать идеальным газом, а это означает, что  $V_{\text{жидк}} \ll V_{\text{пар}}$ . В таком случае уравнение (3) принимает вид

$$\frac{dp}{p} = \frac{Q}{R} \frac{dT}{T^2}; \quad (4)$$

молярная теплота парообразования в свою очередь зависит от температуры (она обращается в нуль в критической точке), и этой зависимостью нельзя пренебрегать. В термодинамике показывается [63], что для  $Q$  справедливо соотношение

$$\frac{dQ}{dT} = C_p - \Gamma,$$

где  $C_p$  — молярная теплоемкость пара,  $\Gamma$  — молярная теплоемкость жидкости. Отсюда следует

$$Q(T) = Q(T_0) + \int_{T_0}^T (C_p - \Gamma) dT, \quad (5)$$

так что величина  $Q(T)$  в принципе известна. Для получения практической формулы давления пара, т. е. интегрирования уравнения (4), используют тот факт, что при  $T_0 \rightarrow 0$  величина  $C_p$  стремится точно к  $\frac{5}{2} R$ , так что  $C_p - \frac{5}{2} R \rightarrow 0$ . Поскольку  $\Gamma$  также стремится к нулю, то ясно, что величина

$$C_s = C_p - \frac{5}{2} R - \Gamma$$

при  $T_0 \rightarrow 0$  сама стремится к нулю. Приняв в равенстве (5) в качестве точки отсчета  $T_0 = 0$  и произведя интегрирование, получаем

$$Q = Q_0 + \frac{5}{2} RT + \int_0^T C_s dT.$$

Величину  $Q_0$  называют молярной теплотой парообразования «в точке абсолютного нуля». Теперь можно проинтегрировать уравнение (4):

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{Q_0}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + \frac{5}{2} \ln \frac{T}{T_0} + f(T, T_0). \quad (6)$$

В этом соотношении характеристические параметры согласования содержат  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $f(T, T_0)$ , что позволяет хорошо описывать поведение давления пара. Наконец, на основании измеренного давления пара можно сделать заключение о величине термодинамической температуры.

Таблицы давлений пара часто аппроксимируют приближенной формулой

$$\lg \frac{p}{p_{\text{торр}}} = -\frac{A}{T} + B + C \lg \frac{T}{K} + D \cdot T,$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — эмпирические константы (см. например, [68]). Кривые давления пара для  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$  можно найти в работах [69, 70].

### 9.8.3. Магнитный термометр

Очень низкие термодинамические температуры ( $T \leq 1$  К) достигаются с помощью адиабатического размагничивания. В этой области температуру можно определять, используя зависимость магнитной проницаемости парамагнитного вещества от температуры. Для взаимодействующих друг с другом парамагнитных ионов в кристаллическом соединении [например, для ионов церия в кристалле  $\text{Ce}_2\text{Mg}_3(\text{NO}_3)_{12} \cdot 24\text{H}_2\text{O}$ ] справедлив закон Кюри

$$\chi = \frac{1}{3} \frac{P_m^2}{R} \frac{1}{T} = \frac{C}{T}, \quad (7)$$

где  $\chi$  — молярная проницаемость,  $P_m$  — молярное намагничение насыщения (произведение атомарного магнитного момента на число Авогадро). Константа Кюри  $C$  для определенного вещества устанавливается путем газотермометрических измерений. Этот метод дает удовлетворительные результаты вплоть до температур порядка 1 мК. Отклонения от обычного закона Кюри при температурах ниже 10 мК (вызванные взаимодействием с локальным кристаллическим полем, а также взаимодействием ионов между собой) учитываются с помощью разложения в ряд

$$\chi = \frac{C}{T} \left( 1 + \frac{C_1}{T} + \frac{C_2}{T^2} + \dots \right). \quad (8)$$

Новые данные о магнитных измерениях температуры в области от 1 до 83 К приведены в работе [71].

### 9.8.4. Пирометр

При измерении термодинамических температур выше 1500 К газовые термометры применять уже нельзя. В этой области используется излучение черного тела. Если  $T$  — температура черного тела (излучательная способность = поглощательная способность = 1), то, согласно формуле излучения Планка, плотность излучения <sup>1)</sup> определяется выражением

$$\frac{\partial L(\lambda, T)}{\partial \lambda} = L_\lambda(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(c_2/\lambda T) - 1}, \quad (9)$$

где

$$c_1 = 2hc^2 = 1,191 \cdot 10^{-16} \text{ с} \cdot \text{м}^3, \quad c_2 = \frac{hc}{k} = 0,014388 \text{ К} \cdot \text{м}.$$

В качестве измерительного прибора применяют спектральный пирометр, с помощью которого фотоэлектрическим способом регистрируется узкий диапазон длин волн излучения, проходящего через фильтр и оптическую систему. Фототок  $I$  пропорционален потоку излучения, падающему на фотоэлемент и зависящему от термодинамической температуры:

$$I(T) = \int_0^\infty g L_\lambda(\lambda, T) s(\lambda) d\lambda; \quad (10)$$

здесь  $g$  — оптическая постоянная прибора (например, величина диафрагмы), означающая электронное усиление пирометра. Величина  $s(\lambda)$  представляет собой относительную спектральную чувствительность.

Ввиду неустранимого дрейфа системы усиления этот метод не позволяет производить абсолютные измерения [72]. По этой причине измеряют лишь отношения плотностей излучения и ссылаются на воспроизводимое излучение черного тела известной температуры (например, используется точка застывания золота  $T = 1337,58$  К):

$$\frac{I(T)}{I(T_{Au})} = \int_0^\infty L_\lambda(\lambda, T) s(\lambda) d\lambda / \int_0^\infty L_\lambda^{Au}(\lambda, T_{Au}) s(\lambda) d\lambda. \quad (11)$$

Наконец, нужно отметить, что все приведенные методы, за исключением измерения скорости звука, не дают прямого абсолютного определения термодинамической температуры, так что до сих пор представление термодинамической температуры в виде непрерывной переменной возможно только с помощью газовых и акустических термометров.

<sup>1)</sup> Основные понятия физики излучения, такие, как плотность излучения и т. д., обсуждаются в гл. 10.

### 9.9. Международная практическая температурная шкала

Практическое измерение термодинамической температуры с помощью газового термометра обременительно и дорого. Поэтому предпринимаются попытки развить более удобные методы измерения температуры, результаты которых по возможности приближались бы к значениям термодинамической температуры; другими словами, термодинамическая шкала заменяется «практической» температурной шкалой. Для этого выбирается некоторое количество хорошо воспроизводимых *опорных точек*, термодинамические температуры которых тщательно измерены и зафиксированы при помощи газовых термометров. С помощью опорных точек градуируются приборы для измерения температуры, показания которых между опорными точками описываются хорошо известными функциями термодинамической температуры. Эти функции можно получить как из экспериментально измеряемых значений, так и из теоретических выкладок. Иными словами, соответствие практической температурной шкалы шкале термодинамической прямо зависит от состояния измерительной техники и теории. Усовершенствование в обеих этих областях влечет за собой пересмотр практической температурной шкалы.

Первая международная обязательная практическая температурная шкала была введена в 1927 г. на VII Генеральной конференции по мерам и весам (ГКВМ) под названием «Международная температурная шкала 1927». Она представляла собой шкалу Цельсия, единица которой ( $1^{\circ}\text{C}$ ) определялась с помощью интервала между точкой таяния льда ( $t=0^{\circ}\text{C}$ ) и точкой кипения воды ( $t=100^{\circ}\text{C}$ ). В области температур от  $t=-183^{\circ}\text{C}$  до  $t=1063^{\circ}\text{C}$  эта шкала реализовалась с помощью четырех других опорных точек [точек кипения кислорода ( $-183^{\circ}\text{C}$ ) и серы ( $445^{\circ}\text{C}$ ), точек плавления серебра ( $962^{\circ}\text{C}$ ) и золота ( $1063^{\circ}\text{C}$ )]. Для измерения температур использовались три прибора: в области от  $-183^{\circ}$  до  $660^{\circ}\text{C}$  — термометр сопротивления, от  $660^{\circ}$  до  $1063^{\circ}\text{C}$  — термоэлемент, выше  $1063^{\circ}\text{C}$  — пирометр.

Эта температурная шкала была заменена на IX ГКМВ «Международной температурной шкалой 1948». Опорные точки остались прежними, но условия, которые накладываются на степень чистоты веществ, используемых для опорных точек, и термометрических веществ, стали более жесткими. Применявшаяся до того времени в пирометрических измерениях формула излучения Вина была заменена формулой Планка с уточненным численным значением константы излучения  $c_2$ .

В связи с тем, что X ГКМВ в 1954 г. установила температуру тройной точки воды  $273,16\text{ K}$  в качестве базисной величины Международной системы единиц, в 1960 г. XI ГКМВ переимено-

вала «Международную температурную шкалу 1948» в «Международную практическую температурную шкалу 1948» (МПТШ-48). Добавление «практическая» указывает на то, что эта температурная шкала в общем не совпадает с термодинамической. Точка таяния льда была заменена тройной точкой воды ( $t=0,01^{\circ}\text{C}$ ), а точка кипения серы — точкой плавления цинка ( $t=420^{\circ}\text{C}$ ).

Со временем на основе усовершенствованных методов измерений были обнаружены отличия МПТШ-48 от термодинамической шкалы, особенно в области высоких температур. Кроме того, возникла необходимость продолжить температурную область до более низких температур. Поэтому Консультативный комитет по термометрии (ККТ) создал новую, усовершенствованную шкалу, которая была объявлена обязательной на XIII ГКМВ под названием «Международная практическая температурная шкала 1968» (МПТШ-68) [73]. Температуры МПТШ-68 снабжаются индексом ( $T_{68}$  или  $t_{68}$ ). С помощью пяти опорных точек температурная шкала была продолжена ниже  $-183^{\circ}\text{C}$  до тройной точки водорода при  $T_{68}=13,81\text{ К}$ . В табл. 6 приведены опорные точки МПТШ-68, а также оценочные погрешности, с которыми эти точки устанавливались. Температуры опорных точек даются для нормального давления  $p=101325\text{ Па}$  ( $\triangleq 1\text{ атм} \triangleq 760\text{ торр}$ ), за исключением тройных точек и точки кипения водорода. Альтернативой точке кипения воды является точка затвердевания олова ( $t_{68}=231,9681^{\circ}\text{C}$  с оценочной погрешностью  $0,015\text{ К}$ ).

Таблица 6

## Определяющие опорные точки МПТШ-68 [62]

Опорная точка	$T_{68}, \text{ К}$	$t_{68}, ^{\circ}\text{C}$	Оценочная погрешность, К
Тройная точка равновесного водорода	13,81	$-253,34$	0,01
Точка кипения равновесного водорода при давлении 3330,6 Па = 25/76 атм	17,042	$-256,108$	0,01
Точка кипения равновесного водорода	20,28	$-252,87$	0,01
Точка кипения неона	27,102	$-246,048$	0,01
Тройная точка кислорода	54,361	$-218,789$	0,01
Точка кипения кислорода	90,188	$-182,962$	0,01
Тройная точка воды	273,16	0,01	Точно по определению
Точка кипения воды	373,15	100	
Точка затвердевания цинка	692,73	419,58	
Точка затвердевания серебра	1235,08	961,93	
Точка затвердевания золота	1337,58	1064,43	

Наряду с основными опорными точками в МПТШ-68 имеются и вторичные точки отсчета, температуры которых, определяемые нормальными приборами, приводятся в табл. 7 [62].

Таблица 7

**Вторичные точки отсчета МПТШ-68**

Состояние равновесия	Значения температуры в МПТШ-68	
	$T_{68}, \text{ K}$	$t_{68}, ^\circ\text{C}$
Тройная точка нормального водорода	13,956	—259,194
Точка кипения нормального водорода	20,397	—252,753
Тройная точка неона	24,555	—248,595
Тройная точка азота	63,148	—210,002
Точка кипения азота	77,348	—195,802
Точка сублимации двуокиси углерода	194,674	—78,476
Точка затвердевания ртути	234,288	—38,862
Точка замерзания воды	273,15	0
Тройная точка дифенильного эфира	300,02	26,87
Тройная точка бензокарбоновой кислоты	395,52	122,37
Точка затвердевания индия	429,784	156,634
Точка затвердевания висмута	544,592	271,442
Точка затвердевания кадмия	594,258	321,108
Точка затвердевания свинца	600,652	327,502
Точка кипения ртути	692,81	356,66
Точка кипения серы	717,824	444,674
Точка затвердевания эвтектического сплава меди с алюминием	821,38	548,23
Точка затвердевания сурьмы	903,89	630,74
Точка затвердевания алюминия	933,52	660,37
Точка затвердевания меди	1357,6	1084,5
Точка затвердевания никеля	1728	1455
Точка затвердевания кобальта	1767	1494
Точка затвердевания палладия	1827	1554
Точка затвердевания платины	2045	1772
Точка затвердевания родия	2236	1963
Точка затвердевания иридия	2720	2447
Точка затвердевания вольфрама	3660	3387

*Пояснения к- понятиям равновесного  
и нормального водорода*

В молекуле водорода спины обоих протонов ( $j=1/2$ ) могут быть параллельными или антипараллельными, поэтому существуют два возможных спин-изомера водорода:

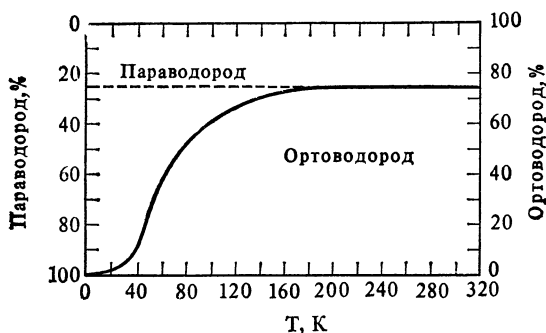


Рис. 72. Зависимость равновесного состояния водорода от температуры.

ортоводород: спины параллельны  $\uparrow\uparrow$ , результирующий спин  $I=1$ ;  
 параводород: спины антипараллельны  $\uparrow\downarrow$ , результирующий спин  $I=0$ .  
 Параллельность спинов связана с антисимметричной волновой функцией водородной молекулы, антипараллельность — с симметричной. Возбуждение молекулы водорода происходит вследствие возбуждения во вращательных состояниях, причем антисимметричное состояние приводит к вращательному уровню с нечетным квантовым числом полного момента  $J=1, 3, 5, \dots$ , а симметричное состояние — к уровню с  $J=0, 2, 4, \dots$ , [74]. Поэтому симметричное состояние является энергетически самым низким. Поскольку переход между орто- и параводородом весьма затруднен [74] (время полураспада исчисляется месяцами), водород можно рассматривать как смесь двух модификаций. В равновесии при комнатной температуре устанавливается отношение орто- и параводорода, которое соответствует статистическим весам, определяемым числом магнитных подсостояний, т. е.

$$\frac{\nu_{\text{орто}}}{\nu_{\text{пара}}} = \frac{2I_{\text{орто}} + 1}{2I_{\text{пара}} + 1} = \frac{3}{1}.$$

При охлаждении обе модификации стремятся к своим наинизшим вращательным состояниям, но отношение  $\nu_{\text{орто}}/\nu_{\text{пара}}=3/1$  вначале сохраняется («нормальный водород»). Через некоторое время устанавливается новое термическое равновесие, при котором количество параводорода, являющегося энергетически более низкой модификацией, возрастает. Отношение ортоводорода к параводороду является функцией температуры [«равновесный водород»,  $\nu_{\text{орто}}/\nu_{\text{пара}}=f(T)$ ] (рис. 72). Вблизи точки абсолютного нуля существует только параводород. При возобновлении нагревания сначала возбуждается вращение и перехода параводорода в ортоводород не происходит, так что чистый параводород сохраняется довольно продолжительное время и при более высоких температурах.

Установление равновесия ускоряется в присутствии таких парамагнитных веществ, как кислород, поглощенный активированным углем, или гидрат окиси железа, поскольку в сильно неоднородном магнитном поле парамагнитной молекулы запрет на переход ослаблен.

## 9.10. Нормальные приборы МПТШ-68

В области от 13,81 К до 630,74°С ( $\triangle 903,89$  К — точка затвердевания сурьмы) в качестве измерительного прибора используется платиновый термометр сопротивления. При 0°С он об-



ладает сопротивлением от 20 до 30 Ом и при измерении пропускает ток от 1 до 2 мА. Для определения температуры исходят не из сопротивления  $R(T_{68})$ , измеренного непосредственно при этой температуре, а из отношения сопротивлений

$$W(T_{68}) = \frac{R(T_{68})}{R(273,15\text{K})},$$

что в значительной степени устраняет разброс показаний различных термометров. При  $t_{68}=100^\circ\text{C}$  это отношение не должно быть меньше 1,39250. Измеряемые отношения сопротивления приводятся в соответствие с температурами МПТШ-68 при помощи интерполяционных формул.

При температурах ниже  $0^\circ\text{C}$  отношение сопротивлений заменяется функцией отсчета  $W_{\text{ККТ}}(T_{68})$  и функцией отклонения  $\Delta W(T_{68})$ :

$$W(T_{68}) = W_{\text{ККТ}}(T_{68}) + \Delta W(T_{68}). \quad (12)$$

Функции отсчета были установлены Консультативным комитетом по термометрии (ККТ) для идеального платинового термометра сопротивления; ее значения в опорных точках приведены в табл. 8. Температура связана с функцией отсчета следующим образом:

$$T_{68} = a_0 + \sum_{k=1}^{20} a_k (\ln W_{\text{ККТ}}(T_{68}))^k. \quad (13)$$

Первый коэффициент равен  $a_0=273,15$  К, так как  $W_{\text{ККТ}}(273,15\text{ К})=1$ . Остальные коэффициенты задаются в 16 точках.

Таблица 8

Отношение сопротивлений идеального платинового термометра сопротивления

Опорная точка	$W_{\text{ККТ}}(T_{68})$
Тройная точка равновесного водорода	0,00141206
Точка кипения равновесного водорода при $p = 33\,330,6$ Па	0,00253444
Точка кипения равновесного водорода	0,00448517
Точка кипения неона	0,01221272
Тройная точка кислорода	0,09197252
Точка кипения кислорода	0,24379909
Тройная точка воды	1
Точка кипения воды	1,39259668

Функция  $\Delta W(T_{68})$  описывает отклонения реального платинового термометра сопротивления от идеального отношения сопротивлений; она определяется разложением  $T_{68}$  в степенной ряд, который в различных температурных областях, отделенных друг от друга опорными точками, имеет разную форму (табл. 9).

Функции отклонения должны непрерывно переходить друг в друга в пограничных точках между отдельными температурными подобластями. Это наряду с измерениями в опорных точках позволяет определить коэффициенты степенного ряда.

Таблица 9

Степенной ряд  
для функции отклонения  $\Delta W(T_{68})$

Температурная область	$\Delta W(T_{68})$
13,81 К—20,28 К	$\sum_{i=1}^3 a_i T_{68}^i$
20,28 К—54,361 К	$\sum_{i=1}^3 b_i T_{68}^i$
54,361 К—90,188 К	$\sum_{i=1}^2 c_i T_{68}^i$
90,188 К—273,15 К	$\sum_{i=1}^4 d_i T_{68}^i$

Чтобы исходя из соотношений (12) и (13) вычислить температуру  $T_{68}$  на основании измеренного отношения сопротивлений  $W(T_{68})$ , нужно провести итерацию. Сначала принимается, что  $\Delta W(T_{68})=0$ , т. е.  $W_{\text{ККТ}}(T_{68})=W(T_{68})$ . Затем с помощью соотношения (13) вычисляется приближенная температура, которая вносится в степенной ряд  $\Delta W(T_{68})$ . Таким образом из уравнения (12) получается новая функция  $W_{\text{ККТ}}(T_{68})$  и из уравнения (13) — лучшее приближение для  $T_{68}$  и т. д. Если требуемая точность составляет  $10^{-3}$  К, то необходимо сделать 2—3 шага итерации.

В области от 0°C до 630,74°C, исходя из измеренного отношения сопротивлений, сначала определяют температуру  $t'$  в 0°C по формуле

$$t' = \frac{1}{\alpha} [W(t') - 1] + \delta \left( \frac{t'}{100^\circ\text{C}} \right) \left( \frac{t'}{100^\circ\text{C}} - 1 \right), \quad (14)$$

где

$$W(t') = \frac{R(t')}{R(0^\circ\text{C})}.$$

Константы  $R(0^\circ\text{C})$ ,  $\alpha$  и  $\delta$  определяются путем измерения сопротивлений в тройной точке воды, в точке кипения воды или в точке затвердевания олова и в точке затвердевания цинка. Затем из степенного ряда для  $t'$  получают температуру  $t_{68}$ , причем в точке плавления льда, точке кипения воды, точке затвердевания цинка и точке затвердевания сурьмы (вторичная точка отсчета) справедливо равенство  $t_{68} = t'$ , т. е.

$$t_{68} = t' + 0,045 \left( \frac{t'}{100^\circ\text{C}} \right) \left( \frac{t'}{100^\circ\text{C}} - 1 \right) \left( \frac{t'}{419,58^\circ\text{C}} - 1 \right) \left( \frac{t'}{630,74^\circ\text{C}} - 1 \right). \quad (15)$$

Для температурных измерений в области от  $630,74^\circ\text{C}$  до  $1064,43^\circ\text{C}$  в качестве нормального прибора следует применять платинородиевый термоэлемент (10% Rh-платина)<sup>1)</sup>. Температура  $t_{68}$  спая (при этом другой спай имеет температуру  $0^\circ\text{C}$ ) определяется с помощью термо-э. д. с.  $E(t_{68})$  по формуле

$$E(t_{68}) = a + bt_{68} + ct_{68}^2.$$

Калибровка осуществляется путем измерений напряжения при температуре  $630,74^\circ\text{C}$ , которая сообщается термометру сопротивления, а также в опорных точках  $t = 961,93^\circ\text{C}$  (точка затвердевания серебра) и  $t = 1064,43^\circ\text{C}$  (точка затвердевания золота).

Значения  $E(t)$  должны удовлетворять следующим условиям:

1.  $E(t_{\text{Au}}) = (10\,300 \pm 50) \text{ мкВ}$ .
2.  $E(t_{\text{Au}}) - E(t_{\text{Ag}}) = 1183 \text{ мкВ} + 0,158(E(t_{\text{Au}}) - 10\,300 \text{ мкВ}) \pm 4 \text{ мкВ}$ .
3.  $E(t_{\text{Au}}) - E(630,74^\circ\text{C}) = 4766 \text{ мкВ} +$   
 $+ 0,631(E(t_{\text{Au}}) - 10\,300 \text{ мкВ}) \pm 8 \text{ мкВ}$ .

При температурах выше  $1064,43^\circ\text{C}$  для определения МПТШ-68 используется формула излучения Планка. Температура  $T_{68}$  определяется отношением плотности излучения черного тела, которое имеет эту температуру, к плотности излучения черного тела, которое обладает температурой точки затвердевания золота:

$$\frac{\partial L(\lambda, T_{68})}{\partial \lambda} / \frac{\partial L(\lambda, T_{68}(\text{Au}))}{\partial \lambda} = \frac{\exp \left[ \frac{c_2}{\lambda T_{68}(\text{Au})} - 1 \right]}{\exp \left[ \frac{c_2}{\lambda T_{68}} - 1 \right]}.$$

<sup>1)</sup> Или термопару.— Прим. перев.

Для точки затвердевания золота (точки золота) установлено значение  $T_{\text{зз}} = 1337,58 \text{ К}$ , а для константы излучения —  $c_2 = 0,014 388 \text{ К} \cdot \text{м}$ .

### 9.11. Реализация МПТШ выше точки золота

Для реализации МПТШ-68 выше  $1064,43^\circ\text{С}$  по определению используется *черный излучатель*, который может быть установлен на точке затвердевания золота, а также прибор, с помощью которого можно сравнивать спектральные энергетические яркости.

Черный излучатель представляет собой графитовый объемный излучатель, который окружен расплавленным и застывающим золотом и отверстие которого мало по сравнению с полной внутренней поверхностью. Коэффициент излучения должен быть близок к единице. На рис. 73 изображен черный излучатель в точке золота, который используется для реализации МПТШ-68 [75]. Излучающая полость образована тонкостенной (толщина стенки 0,5 мм) графитовой трубкой с излучающим отверстием. Нагревательные блоки 1, 2 и 3 отрегулированы таким образом, чтобы процесс плавления в опорной точке занимал по меньшей мере 0,5 часа.

В качестве измерительного прибора применяется пирометр. С его помощью определяют отношение энергетических яркостей, для чего яркость источника излучения в определенном узком диапазоне длин волн сравнивается с яркостью нити накали-

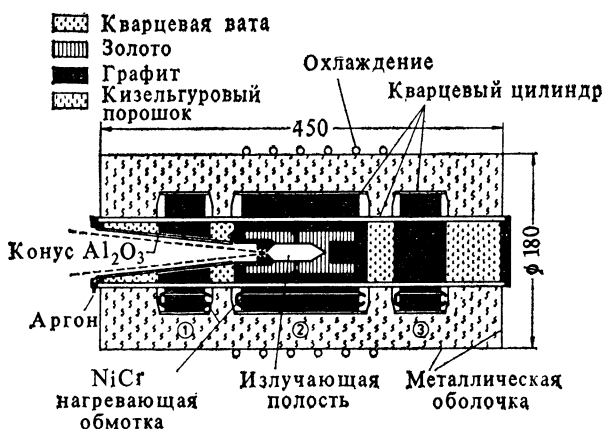


Рис. 73. Черный излучатель в точке золота.

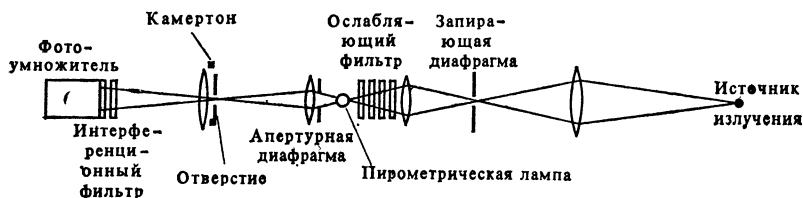


Рис. 74. Пирометр NSL [76].

Камертон следит за изменением света, так как при электронном усилении необходима лишь узкая полоса частот.

вания, вмонтированной в пирометр лампы (метод изохромат<sup>1)</sup>). Хотя определенная длина волны в МПТШ-68 не предусматривается, обычно из практических соображений останавливаются на длине волны  $\lambda = 650$  нм.

Источник излучения с помощью системы линз отображается на поверхность нити накала лампы (рис. 74). Ток в лампе регулируется таким образом, чтобы различие яркостей нити и изображения исчезало. В *визуальном пирометре* детектором является человеческий глаз, так что точность уравнивания ограничивается контрастной чувствительностью глаза. В настоящее время применяют *фотоэлектрический пирометр*, поскольку фотозлемент, снабженный электронным умножителем, более чувствителен к разнице яркостей, чем человеческий глаз. При этом фототоки, порождаемые потоками излучения от источника и пирометрической лампы, попеременно регистрируются и уравниваются путем регулирования тока в лампе.

Выражение для отношения энергетических яркостей, которое задается по определению, справедливо лишь для строго монохроматической чувствительности пирометра при установленной длине волны. Пирометр чувствителен в конечном диапазоне длин волн, и в этом диапазоне спектры черных излучателей, соответствующие различным температурам, имеют разную форму. По этой причине отношение энергетических яркостей заменяется отношением сигналов, для которого справедливо следующее выражение:

$$\frac{I(T)}{I(T_{Au})} = \frac{\int_0^{\infty} L_{\lambda}(\lambda, T) s(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} L_{\lambda}(\lambda, T_{Au}) s(\lambda) d\lambda},$$

<sup>1)</sup> Наряду с методом изохромат используется метод изотерм, в котором сравниваются плотности излучения при двух различных длинах волн и постоянной температуре, а также метод полного излучения, в котором участвует вся спектральная область.

где  $s(\lambda)$  — спектральная чувствительность пирометра. В общем случае в соответствии с формулой

$$\frac{1}{\lambda_e} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} L_{\lambda}(\lambda, T) s(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} L_{\lambda}(\lambda, T) s(\lambda) d\lambda}$$

вводится эффективная длина волны  $\lambda_e$ . Она зависит от спектральной чувствительности пирометра и от формы спектра черного излучателя и позволяет использовать формулу для отношения энергетических яркостей, т. е.

$$\frac{I(T)}{I(T_{Au})} = \frac{L_{\lambda}(\lambda_e, T)}{L_{\lambda}(\lambda_e, T_{Au})} = \frac{\exp(c_2/\lambda_e T_{Au}) - 1}{\exp(c_2/\lambda_e T) - 1}.$$

Для реализации МПТШ-68 выше точки золота предлагается следующий путь.

а. Сначала пирометр уравнивается с излучением черного тела в точке золота. Затем лампа отсчета, по возможности приближающаяся к черному излучателю (лампа с вольфрамовой лентой накаливания; для достижения температур до 1650°C из нее выкачивается воздух, для более высоких температур лампа заполняется газом), настраивается таким образом, чтобы яркость ее была такой же, как у пирометрической лампы, ток которой установлен на значении, полученном при уравнивании в точке золота. Тем самым лампа отсчета калибруется в точке золота. Хотя дальнейшее распространение температурной шкалы зависит от стабильности лампы, этот метод более точен, чем калибровка самого пирометра.

б. После этого можно перейти в область температур, лежащих выше точки золота, примерно до 2000°C, основываясь на измерениях энергетических яркостей источников согласно определяющему уравнению. С этой целью лампа отсчета, прокалиброванная в точке золота, доводится до таких температур, чтобы ее энергетическая яркость составляла известное кратное энергетической яркости в точке золота. Для получения такого кратного может служить двухлучевой делитель (рис. 75). В двухлучевом делителе световой пучок источника с помощью полупрозрачной, полусотражающей стеклянной пластины расщепляется на два пучка. На путях обоих составляющих пучков расположены затворы, которые могут отсечь эти пучки. С помощью плоских зеркал оба составляющих пучка снова соединяются и затем попадают в пирометр. Если лампа отсчета, прокалиброванная в точке золота, наблюдается через двухлучевой делитель с помощью пирометра, то вследствие меньшей проницаемости нужно подрегулировать пирометрическую лампу, пока снова не будет установлена одинаковая яркость. При выделении

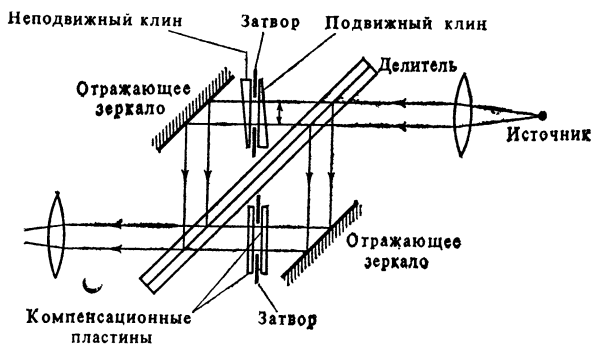


Рис. 75. Двухлучевой делитель.

одного составляющего пучка пирометр регистрирует только половину энергетической яркости пучка. Чтобы можно было регистрировать такие же энергетические яркости, как и раньше в точке золотa, следует настроить лампу отсчета на более высокую температуру  $T_1$ , при которой энергетическая яркость удваивается по сравнению с яркостью в точке золотa. Для температуры  $T_1$  справедливо отношение

$$\frac{\int_0^{\infty} L_{\lambda}(\lambda, T_1) s(\lambda) \tau_D(\lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} L_{\lambda}(\lambda, T_{Au}) s(\lambda) \tau_D(\lambda) d\lambda} = 2,$$

где  $\tau_D(\lambda)$  — относительная проницаемость двухлучевого делителя, или, если использовать эффективную длину волны,

$$\frac{\exp(c_2/\lambda_e T_{Au}) - 1}{\exp(c_2/\lambda_e T_1) - 1} = 2.$$

После этого при удвоенной энергетической яркости пропускается и второй составляющий луч, и для уравнивания яркостей регулируется пирометрическая лампа; тем самым пирометр устанавливается на температуру  $T_1$ . Вновь выделяя составляющий пучок и удваивая энергетическую яркость, достигают температуры  $T_2$ , при которой энергетическая яркость в четыре раза больше, чем в точке золотa. В результате  $n$ -кратного повторения этого приема приходят к температуре  $T_n$  с помощью соотношения

$$\frac{\exp(c_2/\lambda_e T_{Au}) - 1}{\exp(c_2/\lambda_e T_n) - 1} = 2^n,$$

в. В дальнейших измерениях нужно установить эффективную длину волны  $\lambda_e$ , чтобы из измеренного отношения энергетических яркостей пучков вычислить температуру.

г. Чтобы достичь равенства яркостей при помощи пирометрической лампы в области температур от 2000 до 8000°C, нужно ослабить излучение лампы отсчета при помощи абсорбционного светофильтра. Спектральная пропускная способность абсорбционного светофильтра описывается выражением

$$\tau(\lambda) = \exp(-Ac_2/\lambda).$$

При наблюдении через абсорбционный светофильтр источника, имеющего температуру  $T$ , пирометр регистрирует энергетическую яркость, соответствующую более низкой температуре  $T_a$ . При использовании эффективной длины волны выполняется соотношение

$$\frac{\exp(c_2/\lambda_e T) - 1}{\exp(c_2/\lambda_e T_a) - 1} = \exp(-Ac_2/\lambda_e).$$

Аппроксимируя формулу излучения Планка соответствующей формулой Вина, получаем выражение

$$A = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T},$$

которое позволяет вычислить настоящую температуру  $T$  из температуры  $T_a$ , измеренной при помощи абсорбционного светофильтра.

## 9.12. МПТШ ниже 13,81 К

В области низких температур МПТШ-68 заканчивается на температуре 13,81 К, ниже которой опорные точки не установлены. Для практического измерения температур в МПТШ-68 рекомендуется шкала давления гелиевых паров. В области от 0,8 до 5,2 К применяется «<sup>4</sup>Не-шкала 1958», а в области от 0,2 до 3,3 К — «<sup>3</sup>Не-шкала 1962»; они опубликованы в работах [77, 78].

На стр. 125 работы [71] для продолжения МПТШ-68 в область от 1 до 13,81 К предлагается магнитное измерение температуры.

## 9.13. Новые данные

Приближение практической температурной шкалы к термодинамической не ограничивается МПТШ-68. Более тонкие методы измерений указывают на некоторые неточности при установлении МПТШ-68. Из оригинальной литературы можно сослаться на работу [62]. В 1972—1973 гг. были проведены эксперименты с газовым термометром, в котором с помощью тщательного охлаждения лучше устранялись адсорбционные эффекты. В результате было установлено новое значение точки кипения воды, составляющее 99,970°C, что на 0,030 К отклоняется от прежнего значения, определенного с погрешностью 0,005 К.



Такая поправка имела бы далеко идущие последствия для определения термодинамической температуры, если бы оно базировалось на двух опорных точках: замерзания и кипения воды с промежутком  $100^{\circ}\text{C}$ . Температура  $T_0$ , определяемая через коэффициент расширения, получила бы значение  $273,22\text{ K}$ . Вследствие этого в значение температуры тройной точки воды, равное  $T_{\text{тр}}=273,16\text{ K}$ , где  $T_{\text{тр}}=T_0+0,01\text{ K}$ , пришлось бы внести поправку, равную  $0,07\text{ K}$ ; первоначально точность определения тройной точки воды составляла  $0,01\text{ K}$ . При определении же термодинамической температуры через *одну* опорную точку не возникает необходимости в коррекции всей шкалы.

Тем же методом были найдены отклонения от значений МПТШ-68 в точках олова и цинка (для последнего отклонение составляет  $0,1\text{ K}$ ).

Отклонения от гелиевой шкалы были обнаружены путем измерений посредством акустических термометров, а также газовых термометров, разработанных специально для низких температур. Например, значение  $^4\text{He}$ -шкалы в точке кипения гелия на  $8\text{ мК}$  ниже, чем  $4,12\text{ K}$ .

С помощью спектральных пирометров МПТШ-68 была также выверена в диапазоне температур от точки золота и ниже вплоть до  $725^{\circ}\text{C}$ . В этом диапазоне в качестве нормального измерительного прибора используется термоэлемент. При этом отклонение МПТШ-68 от термодинамической шкалы оказалось максимальным при температуре  $800^{\circ}\text{C}$  и составило около  $0,7\text{ K}$ . Согласно этим измерениям, разность между точкой серебра и точкой золота оказалась на  $0,15\text{ K}$  меньше, чем по МПТШ-68.

Вторичные точки отсчета МПТШ-68 также были выверены. Оказалось, что и здесь необходима коррекция: для точки затвердевания меди  $+0,4\text{ K}$ , для точки затвердевания платины  $-4,1\text{ K}$ , для точки плавления вольфрама  $+35\text{ K}$ .

Обнаруженные расхождения между МПТШ-68 и термодинамической температурой в настоящее время еще не привели к созданию новой практической температурной шкалы. Однако Консультативный комитет по термометрии разработал проект усовершенствованной формулировки МПТШ-68, в котором: а) указанные ранее оценочные погрешности определения опорной точки отбрасываются, б) уточняются некоторые вторичные точки отсчета, в) не рекомендуется использование гелиевой шкалы. Для диапазона от  $1$  до  $30\text{ K}$  планируется временная практическая шкала низких температур, которая должна реализоваться с помощью германиевого термометра сопротивления и базироваться на измерениях с помощью газовых, акустических и магнитных термометров. В дальнейшем предполагается также заменить термоэлемент в качестве нормального измерительного прибора.

## 10 Реализация единицы силы света

Видимый свет представляет собой часть электромагнитного спектра в диапазоне длин волн  $\lambda$  приблизительно от 380 до 780 нм. Свет занимает особое место — его можно характеризовать тем, насколько «ярким» он кажется *человеческому глазу*. В XIX в. с возникновением светотехники появилась потребность в количественном сравнении источников света и освещенностей. Так была создана *фотометрия*, использующая понятие *силы света*. Сила света является одной из основных величин в системе СИ, ее базисная единица называется *кандéлой* (кд).

Процесс восприятия света глазом весьма сложен. В нем участвуют сетчатка, зрительный нерв и головной мозг, существенную роль играют физические, физиологические, а также психологические процессы. Одинаковое по мощности излучение в различных спектральных областях глаз воспринимает разным по яркости. Спектральная чувствительность глаза достигает максимума при длине волны примерно 550 нм (зеленый участок спектра), а ближе к границам воспринимаемой спектральной области снижается (рис. 78). Для достижения одинакового восприятия яркости следует при различных длинах волн использовать разные мощности излучения. Поэтому *свет* в собственном смысле означает излучение, избирательно оцениваемое глазом (и связанным с ним аппаратом человеческого восприятия). Следовательно, глаз представляет собой первоначальный детектор для измерения яркостей. По этой причине *фотометрические величины оцениваются глазом*.

В дальнейшем мы сначала рассмотрим энергетические величины (т. е. величины, связанные с физическим излучением), а затем соответствующие им фотометрические величины.

### 10.1. Энергетические величины

Электромагнитная теория света, описанная уравнениями Максвелла (стр. 80), показала, в частности, что с каждым переменным электромагнитным полем, которое выражается через электрическую напряженность **E** и магнитную напряженность **H**, связан перенос энергии (энергия излучения). Он выражается вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

и измеряется в системе СИ единицами  $1 \text{ В/м} \cdot 1 \text{ А/м} = 1 \text{ Дж/м}^2\text{с} = 1 \text{ Вт/м}^2$  (единица *плотности потока энергии излучения*<sup>1)</sup>). Эта формулировка переноса энергии справедлива для всего электромагнитного спектра, в том числе и для его видимой части.

Силу излучения источника можно измерять по тому действию, которое оно оказывает на материю, находящуюся на его

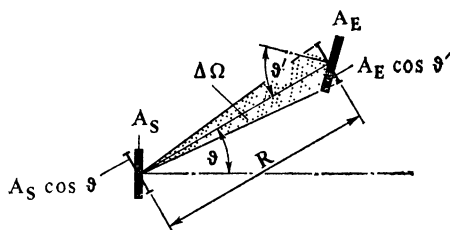


Рис. 76. К определению силы излучения.

$A_S$  — поверхность излучателя,  $A_E$  — поверхность приемника.

пути, например по нагреванию. Измеряется энергия излучения от источника к приемнику в единицу времени, т. е. мощность излучения, или *поток излучения*  $\Phi_e$  (произведение вектора Пойтинга на площадь, измеряемое в ваттах). Будем отмечать энергетические величины индексом  $e$ , а фотометрические — индексом  $v$  (визуально).

На рис. 76 изображено излучение, выходящее с излучающей поверхности  $A_S$  и попадающее на произвольно ориентированную поверхность  $A_E$ , удаленную от  $A_S$  на расстояние  $R$ . Приемник виден из излучателя под телесным углом

$$\Delta\Omega = \frac{A_E \cos \vartheta'}{R^2}.$$

Площади излучателя и приемника считаются малыми по сравнению с квадратом расстояния между ними.

Поток излучения  $\Phi_e$ , попадающий на приемник, зависит от источника излучения, который в свою очередь характеризуется *силой излучения*  $I_e$ , последняя же получается из соотношения

$$\Delta\Phi_e = I_e \Delta\Omega, \quad I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega} \quad (1)$$

(сила излучения равна потоку излучения в телесном угле). При этом сила излучения может зависеть и от угла испускания  $\vartheta$ . Источники светового излучения являются преимущественно *поверхностными излучателями*, подчиняющимися *закону Ламберта*, согласно которому сила излучения пропорциональна видимой излучающей поверхности  $A'_S = A_S \cos \vartheta$ <sup>2)</sup>:

$$I_e = L_e A_S \cos \vartheta. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Или интенсивности излучения. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Солнце тоже является ламбертовым излучателем, поэтому солнечный диск кажется равномерно ярким. Звезды же рассматриваются как точечные излучатели, для них можно задать только силу излучения  $I_e$ , и поток излучения равен  $\Phi_e = 4\pi I_e$ .

В это выражение вошла новая величина, характеризующая природу источника излучения, — *энергетическая яркость*  $L_e$ . Единицы силы излучения и энергетической яркости следуют из соотношений (1) и (2):

$$[I_e] = 1 \text{ Вт/ср}, \quad [L_e] = 1 \text{ Вт/ср} \cdot \text{м}^2.$$

С учетом выражения (2) поток излучения можно записать в виде

$$\Delta\Phi_e = L_e A_S \cos \vartheta \Delta\Omega, \quad (3)$$

и величиной, описывающей излучатель, является энергетическая яркость  $L_e$ .

Если отнести поток излучения к излучающей поверхности  $A_S$ , то получается величина, зависящая от площади и называемая *энергетической светимостью*,

$$M_e = \frac{\Delta\Phi_e}{A_S} = L_e \cos \vartheta \Delta\Omega \quad (4a)$$

с единицей  $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}$ . Для ламбертова излучателя величина  $L_e$  постоянна, следовательно, интегрирование проводится только по полупространству:

$$M_e^0 = \int L_e \cos \vartheta d\Omega = \pi L_e. \quad (4б)$$

Полная энергетическая светимость и энергетическая яркость связаны друг с другом простым соотношением.

Величиной, соответствующей энергетической яркости на приемнике, является *энергетическая освещенность*  $E_e$ , определяемая как мощность излучения, деленная на площадь приемника:

$$E_e = \frac{\Delta\Phi_e}{A_E}. \quad (5)$$

В этой величине содержится множитель, зависящий от угла (ориентации),  $\cos \vartheta'$ . Внося соотношения (1) в (5), получаем <sup>1)</sup>

$$E_e = \frac{I_e \Delta\Omega}{A_E} = \frac{I_e}{R^2} \cos \vartheta' \Omega_0. \quad (6)$$

В общем случае энергетическая яркость  $L_e$  источника не одинакова для всех спектральных областей — она зависит от длины волны. Существует *спектральное распределение энергетической яркости*, так что в случае излучателя со спектром в интервале длин волн  $\Delta\lambda$  получаем выражение для энергетиче-

<sup>1)</sup> Формула (6) учитывает рассуждения о телесном угле (стр. 16) и содержит единицу телесного угла 1 ср. Во всех предыдущих формулах для  $\Delta\Omega$  использовалась размерность ср, т. е.  $\Delta\Omega = A/R^2$  не является безразмерной величиной.

ской яркости

$$\Delta L_e = \int_{\Delta\lambda} L_{e\lambda}(\lambda) d\lambda. \quad (7)$$

Для черного излучателя, имеющего температуру  $T$ , справедлива формула излучения Планка (см. стр. 123)

$$L_{e\lambda}(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1} \frac{1}{\Omega_0}. \quad (8)$$

Для «линейчатого» излучателя спектральная плотность излучения определяется через соответствующий линейчатый спектр.

В области видимого света в выражение (7) вносится интервал длин волн  $\Delta\lambda = 380\text{—}780$  нм, и тогда поток излучения равен

$$\Delta\Phi_e = A_S \cos \vartheta \Delta\Omega \int_{\lambda=380 \text{ нм}}^{780 \text{ нм}} L_{e\lambda}(\lambda) d\lambda = \int_{\Delta\lambda} \Phi_{e\lambda} d\lambda. \quad (9)$$

## 10.2. Фотометрические величины [79, 80]

Определение яркости источника излучения связано с физиологическим процессом зрения, и потому носит субъективный характер. Обозначим спектральную чувствительность глаза <sup>1)</sup> через  $\gamma(\lambda)$ , тогда оцениваемый поток излучения определяется как

$$\Phi_e^* = \int_{\Delta\lambda} \Phi_{e\lambda} \gamma(\lambda) d\lambda. \quad (10)$$

Если бы глаз мог давать объективную информацию об оцениваемом потоке излучения, то величину  $\Phi_e^*$  в фотометрии следовало бы измерять в ваттах. На самом деле это не так, хотя глаз довольно хорошо решает вопрос, одинаково ли яркими кажутся два излучателя. По этой причине фундаментальной операцией фотометрии является *сравнение яркостей*. Для этого на экран проецируются два световых пятна одинаковых размеров, образуемые разными источниками света, причем так, чтобы они казались одинаково яркими (рис. 81). Для обоих потоков излучения  $\Phi_{e\lambda}$  и  $\Phi'_{e\lambda}$ , попадающих в глаз, выполняется равенство

$$\int_{\Delta\lambda} \Phi_{e\lambda} \gamma(\lambda) d\lambda = \int_{\Delta\lambda} \Phi'_{e\lambda} \gamma(\lambda) d\lambda. \quad (11)$$

Если при одинаковой чувствительности положить в основу еще одну фотометрическую величину, которую нужно определить, то соответствие яркостей, согласно предыдущему выраже-

<sup>1)</sup> Или видность.— *Прим. перев.*

нию, позволяет определить *отношение фотометрических величин*. Так, соотношение оцениваемых потоков излучения равно отношению так называемых *световых потоков*. Аналогично можно отождествить отношения других энергетических величин с отношениями соответствующих фотометрических величин. Например, *энергетической силе света* соответствует *фотометрическая сила света*, а *энергетической яркости* — *фотометрическая яркость*. Сопоставление этих величин приведено в табл. 10. Цель фотометрии заключается теперь в том, чтобы при установлении единиц перейти от отношений фотометрических величин к абсолютным величинам. Однако сначала рассмотрим процесс согласования яркостей.

При одинаковом спектральном распределении двух источников излучения равенству абсолютных энергий излучения соответствует равенство яркостей. Глаз служит лишь нулевым прибором, и его можно заменить физическим детектором, спектральная чувствительность которого весьма отличается от чувствительности глаза. При неодинаковом относительном спектральном распределении двух потоков излучения становится существенным визуальный характер уравнивания яркостей. При этом основное требование фотометрии состоит в том, чтобы независимо от природы источника излучения и спектрального распределения достичь соответствия яркостей путем изменения абсолютных долей интенсивности излучения. Непосредственное сравнение яркостей световых пятен, имеющих различные цвета (*гетерохромная фотометрия*), весьма затруднительно. Поэтому разработаны косвенные методы, например *метод мерцаний*. Свет двух различных длин волн попеременно через регулярные промежутки времени попадает в глаз (вращающийся секторный диск). При этом глаз ощущает мерцание, которое исчезает при равенстве яркостей.

Соотношение, предполагающее равенство потоков излучения при соответствии яркостей [уравнение (11)], предусматривает транзитивность, пропорциональность и аддитивность процесса выравнивания. Для этого необходимо задать функцию  $\gamma(\lambda)$ . Надо отметить, что относительная чувствительность не только различна у разных людей, но зависит еще от условий наблюдения (угол зрения), а также от абсолютной яркости. Это обусловлено свойствами глаза. В сетчатке имеется два сорта рецепторных клеток — колбочки и палочки. Колбочки расположены особенно густо в углублении сетчатки, называемом центральной ямкой, которая представляет собой поверхность с угловым раствором  $1,5^\circ$ . Они обеспечивают цветное зрение и функционируют при адаптации глаза к свету, причем яркость<sup>1)</sup> должна быть больше некоторого граничного значения ( $>10$  кд/м<sup>2</sup>). Палочки же в центре отсутствуют, они расположены в периферийной части сетчатки, не могут различать цвета и функционируют при адаптации глаза к темноте, точнее при яркости меньше  $10^{-3}$  кд/м<sup>2</sup>.

<sup>1)</sup> В данном случае освещенность не задается, так как она пересчитывается в яркость на сетчатке с помощью теорем геометрической оптики.

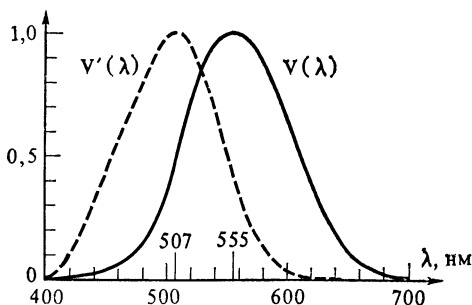


Рис. 77. Спектральная чувствительность  $V(\lambda)$  и  $V'(\lambda)$  в зависимости от длины волны для глаза, адаптированного к свету и темноте ([81], лист 3).

Теперь можно поставить условие, чтобы при сравнении яркостей возбуждались только колбочки. Это имеет место в случае достаточно малого центрального светового пятна при яркости выше некоторого определенного значения. Сравнение яркостей при таких условиях называется *фотопическим* соответствием. Сравнение яркостей при возбуждении исключительно палочек

называется *скотопическим* соответствием. При взаимодействии колбочек и палочек говорят о *мезопическом* соответствии.

Ввиду зависимости относительной чувствительности глаза от наблюдателя был определен идеализированный «стандартный наблюдатель». Международная осветительная комиссия (МОК) установила две функции для такого наблюдателя:  $V(\lambda)$  для фотопического соответствия и  $V'(\lambda)$  для скотопического. Кривая относительной чувствительности глаза  $V(\lambda)$  фотопического *стандартного наблюдателя*, принятая МОК в 1924 г., является результатом усреднения функций  $\gamma(\lambda)$  большого числа наблюдателей. Для этого были проведены фотопические сравнения яркостей (т. е. при адаптации глаза к свету) малых световых пятен (угловой размер  $2^\circ$ ) с помощью метода мерцаний при монохроматическом освещении, причем длина волны постепенно менялась. Функция  $V(\lambda)$  была также принята Международным комитетом по мерам и весам (МКМВ). Скотопический стандартный наблюдатель был установлен МОК в 1951 г. Относительная чувствительность глаза по максимуму нормирована на единицу. Функция  $V(\lambda)$  имеет максимум при  $\lambda = 555$  нм, а  $V'(\lambda)$  — при  $\lambda = 507$  нм. Обе функции представлены на рис. 77. Величины излучения, оцениваемые с помощью этих двух функций, различаются фотопическими или скотопическими добавками.

Согласно уравнению (11), использование функции  $V(\lambda)$  при одинаковых яркостях световых пятен, образуемых потоками излучения со спектральными распределениями  $\Phi_{e\lambda}$  и  $\Phi'_{e\lambda}$ , приводит к уравнению

$$\int_{\Delta\lambda} \Phi_{e\lambda} V(\lambda) d\lambda = \int_{\Delta\lambda} \Phi'_{e\lambda} V(\lambda) d\lambda, \quad (12)$$

или

$$\Phi_e^* = \Phi_e'^*. \quad (13)$$

Эквивалентное фотометрическое выражение гласит: фотометрические световые потоки, попадающие в глаз, равны, т. е.

$$\Phi_V = \Phi_V'. \quad (14)$$

Световой поток  $\Phi_V$  должен быть возрастающей функцией потока излучения, оцениваемого с помощью  $V(\lambda)$ . Простейшим случаем является линейная зависимость

$$\Phi_V = K_m \Phi_e^* = K_m \int_{\Delta\lambda} \Phi_{e\lambda} V(\lambda) d\lambda, \quad (15)$$

где  $K_m$  — константа, означающая максимальное значение фотометрического эквивалента излучения для дневного видения. Для других фотопических величин справедливы соответствующие соотношения, как и для всех скотопических, причем здесь используются функция  $V'(\lambda)$  и постоянная  $K'_m$ . Выражение  $K_m V(\lambda)$  называется *спектральным фотометрическим эквивалентом излучения*.

В фотометрии используются специальные величины, поэтому  $K_m$  обладает собственной размерностью, ее единица: единица светового потока на ватт. Чтобы определить численные значения  $K_m$  и  $K'_m$ , нужно установить систему единиц с базисной единицей, которая может быть представлена в виде эталона.

Со времени возникновения фотометрии делались попытки создать эталонный источник света, сила света которого служила бы базисной единицей. Впервые в 1881 г. было предложено [62, 79] использовать в качестве единицы под названием «виоль» тепловое излучение платиновой поверхности в точке плавления. Отсюда в 1896 г. появилась «децимальная свеча». Однако она была не единственным эталоном. Наряду с ней употреблялась свеча *Гефнера*, которая основывалась на излучении амилацетатного пламени, горевшего при определенных условиях. В 1921 г. МОК предложила новое определение международной свечи, в основе которого лежало три комплекта ламп накаливания. В то же время продолжала использоваться и свеча *Гефнера*. Тем временем в качестве основного эталона был разработан черный излучатель, работающий при температуре затвердевания платины, который впервые был предложен в 1937 г., а в 1967 г. окончательно объявлен обязательным на XIII Генеральной конференции по мерам и весам. Конференция также определила единицу силы света: *1 кандела (кд) — это сила света, излучаемого перпендикулярно с поверхности черного излучателя величиной  $1/6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$  при температуре затвердевания платины, находящейся под давлением 101 325 Па.*



Численное значение единицы силы света, употреблявшееся раньше, слишком сильно отличается от канделы: 1 свеча Гейнера  $\approx 0,9$  кд.

В табл. 10 единицы других фотометрических величин, являющихся производными от единицы силы света, сопоставлены с соответствующими единицами энергетических величин.

Производные единицы светового потока и освещенности сохранили собственные названия:  $[\Phi_V]=1$  люмен и  $[E_V]=1$  люкс.

С помощью определения канделы и значения спектральной плотности излучения черного излучателя можно определить численное значение  $K_m$ . Яркость черного излучателя по определению имеет значение

$$L_V = 6 \cdot 10^5 \text{ кд} \cdot \text{м}^{-2}. \quad (16)$$

Для светимости справедливо выражение

$$M_V = K_m \int_{\Delta\lambda} c_1 \lambda^{-5} (e^{c_2/\lambda T} - 1)^{-1} V(\lambda) d\lambda. \quad (17)$$

При этом, согласно уравнению (4), светимость связана с яркостью соотношением

$$M_V = \pi L_V = \pi \cdot 6 \cdot 10^5 \text{ кд} \cdot \text{ср} \cdot \text{м}^{-2} = \pi \cdot 6 \cdot 10^5 \text{ лм} \cdot \text{м}^{-2}. \quad (18)$$

Теперь  $K_m$  записывается в виде

$$K_m = \frac{\pi L_V}{M_e^*} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 10^5 \text{ лм} \cdot \text{м}^{-2}}{\int_{\Delta\lambda} M_{e\lambda} V(\lambda) d\lambda}. \quad (19)$$

Учитывая, что  $c_1 = 2h \cdot c^2 = 1,191 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2}$ ,  $c_2 = hc/k = 1,44 \times 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$  и температура плавления платины по МПТШ-68 равна  $T_{\text{Pt}} = 2045 \text{ К}$ , получаем

$$K_m = 673 \frac{\text{лм}}{\text{Вт}}. \quad (20)$$

Таким образом, численное значение  $K_m$  определяется значением точки платины и константами формулы излучения Планка, и следовательно, уточнение этих значений ведет к изменению  $K_m$ . Действительно, приняв во внимание новейшее значение температуры плавления платины  $T_{\text{Pt}} = 2040,75 \text{ К}$ , а также показатель преломления воздуха, получаем

$$K_m = 688 \frac{\text{лм}}{\text{Вт}},$$

что значительно отклоняется от принятого значения (20) [82].

Для скотопического эквивалента излучения аналогичный коэффициент равен

$$K'_m = 1725 \frac{(\text{скотопический}) \text{ люмен}}{\text{Вт}}.$$

Таблица 10

## Составление энергетических и фотометрических величин

Излучение			Фотометрия		
Величина	Обозначение	Единица	Величина	Обозначение	Единица
Энергетическая сила света (сила излучения)	$I_e$	Вт·ср <sup>-1</sup>	Сила света	$I_v$	кандела (кд)
Поток излучения (поток лучистой энергии)	$\Phi_e$	ватт (Вт)	Световой поток	$\Phi_v$	кд·ср = люмен (лм)
Энергия излучения	$Q_e$	Вт·с	Световая энергия (количество света)	$Q_v$	лм·с
Энергетическая яркость (лучистость)	$L_e$	Вт·ср <sup>-1</sup> ·м <sup>-2</sup>	Яркость	$L_v$	кд·м <sup>-2</sup>
Энергетическая светимость (излучательность; излучательная, или лучистая, способность)	$M_e$	Вт·м <sup>-2</sup>	Светимость	$M_v$	лм·м <sup>-2</sup>
Энергетическая освещенность (облученность)	$E_e$	Вт·м <sup>-2</sup>	Освещенность	$E_v$	лм·м <sup>-2</sup> = = люкс (лк)
Энергетическая экспозиция (лучистая экспозиция; энергетическое количество освещения)	$H_e$	Вт·м <sup>-2</sup> ·с	Световая экспозиция (количество освещения)	$H_v$	лм·м <sup>-2</sup> ·с = = лк·с

Более высокое численное значение объясняется большей относительной чувствительностью глаза, адаптированного к темноте.

В случае когда измерения проводятся с помощью глаза или детектора, спектральная чувствительность которых находится в соответствии с  $V(\lambda)$ , можно непосредственно использовать эталон силы света, не привлекая фотопического эквивалента излучения, т. е. независимо от точки платины и от значений констант в формуле излучения Планка. Зависимость  $K_m$  от этих значений весьма неудобна, когда исходя из заданной спектральной плотности некоторой энергетической величины нужно вычислить соответствующую фотометрическую величину. Поэтому делаются попытки установить  $K_m$  путем определения. В таком случае фотометрические величины определялись бы посредством радиометрических измерений с помощью детектора, согласованного с  $V(\lambda)$ , и при вычислении использовалось бы фиксированное значение эквивалента излучения.

### 10.3. Реализация эталона силы света

Для реализации канделя используют черный излучатель при температуре плавления платины. Он состоит из закрытой снизу керамической трубки (диаметром до 2 мм и длиной 40 мм), которая вертикально погружена в тигель для расплава, заполненный чистой платиной (рис. 78). Трубка и тигель для расплава закрыты крышкой с отверстием, диаметр которого немного меньше диаметра трубки. С целью термоизоляции тигель для расплава помещен в сосуд, заполненный порошком тория. При нагревании индукционной печью платина расплавляется; при охлаждении платина затвердевает, ее температура устанавливается и сохраняется на значении  $T_{Pt}=2045$  К. С помощью отклоняющей призмы и линзы объемное излучение, ограниченное диафрагмой, проецируется на поверхность, играющую роль фотометра. Путем сравнения полученной на этой поверхности

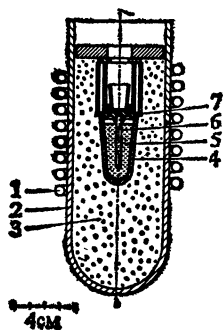


Рис. 78. Платиновый объемный излучатель — эталон канделя.

1 — индукционная печь; 2 — керамический сосуд; 3 — термически изолированный наполнитель; 4 — керамический тигель; 5 — платиновая ванна; 6 — керамическая трубка; 7 — крышка тигля.

освещенности с освещенностью, создаваемой другим источником, последнюю можно выразить в канделах. Измерительная диафрагма устанавливает эффективную поверхность излучателя, погрешности в ее определении влияют на точность установления единицы силы света. Существуют и другие источники ошибок:

1. Нельзя полностью достичь идеальных условий для черного излучателя, так как излучающая полость имеет конечное отверстие (коэффициент излучения меньше единицы).

2. Вследствие теплопроводности и отражения температура излучающей полости несколько ниже температуры платиновой ванны. Платина затвердевает неоднородно.

3. При прохождении через оптическую систему теряется часть света. Необходимые в связи с этим поправки составляют около 1%, что вносит новые погрешности в определение канделы. В общем случае кандела устанавливается с погрешностью 0,2%. Однако отклонения в результатах, получаемых различными лабораториями, составляют около  $\pm 0,4\%$  от принятого среднего значения, а максимальные отклонения достигают даже 0,7%. В настоящее время предпринимаются попытки довести точность до 0,1% путем усовершенствования объемного излучателя [62].

## 10.4. Вторичные эталоны

Воспроизведение канделы как первичного эталона слишком обременительно для постоянного практического применения. Поэтому первичный эталон получают в специальных лабораториях и сравнивают с ним вторичные эталоны — лампы накаливания специальной конструкции. Поскольку от длительного употребления эти лампы меняют свои параметры, то берется несколько ламп, и усредненная сила света всех ламп рассматривается в качестве вторичного эталона. Эти лампы приводятся в действие лишь на короткое время, чтобы в свою очередь позволить прокалибровать другие эталоны.

Существуют два сорта вторичных эталонов — для силы света и для светового потока.

В качестве *вторичных эталонов силы света* используются вольфрамовые лампы накаливания, изготовленные таким образом, что их излучение имеет такое же спектральное распределение, как черный излучатель при температуре  $T_{Pt}=2045\text{ К}$ , т. е. имеют температуру распределения  $T_{Pt}$ . Согласование с первичным эталоном производится, как упоминалось, путем сравнения обеих освещенностей на экране фотометра. Если сила света этих эталонов неодинакова, то равенство освещен-

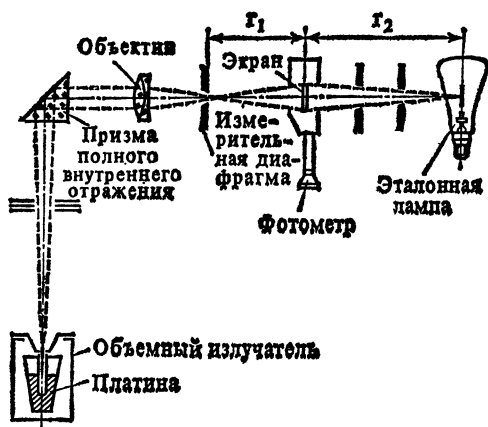


Рис. 79. Вторичный эталон канделы — лампа накаливания [22].

ностей достигается путем изменения расстояния (рис. 79). Тогда (см. стр. 151) для силы света вторичного эталона получаем

$$\frac{I_2}{r_2^2} = \frac{L_1 \cdot A \cdot T}{r_1^2},$$

где  $L_1 = 6 \cdot 10^5$  кд·м<sup>-2</sup> — яркость первичного эталона,  $A$  — площадь диафрагмы,  $T$  — коэффициент проводимости,  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния.

Таблица 11

Яркость черного излучателя  
как функция температуры согласно  
формуле Планка (из работы [80])

$T$ , К	$L$ , кд·м <sup>-2</sup>	$T$ , К	$L$ , кд·м <sup>-2</sup>
1000	2,7069	2045	600000
1100	23,113	2100	838820
1200	140,12	2200	$14377 \cdot 10^3$
1300	650,91	2300	$23543 \cdot 10^3$
1400	2448,4	2400	$37042 \cdot 10^3$
1500	7768,5	2500	$56255 \cdot 10^3$
1600	21444	2600	$82799 \cdot 10^3$
1700	52738	2700	$11851 \cdot 10^3$
1800	117740	2800	$16543 \cdot 10^3$
1900	272180	2900	$22580 \cdot 10^3$
2000	464500	3000	$30202 \cdot 10^3$

Для целей светотехники желательно иметь лампы, излучение которых обладает спектральным распределением, соответствующим более высоким температурам. Согласно формуле Планка, сила света и яркость температурного излучателя сильно возрастают с ростом температуры (табл. 11). Поэтому применяются также эталоны силы света с температурами распределения 2353 К и 2854 К. Эти эталоны калибруются относительно лампы, работающей при  $T_{Pt} = 2045$  К, причем здесь возникает проблема ликвидации цветового различия.

*Вторичные эталоны светового потока* калибруются с помощью вторичных эталонов силы света. Они работают при температурах распределения 2353 К и 2788 К. Полный световой поток определяется путем измерения углового распределения силы света и интегрирования по всему пространству:

$$\Phi_V = \int_0^{4\pi} I_V d\Omega.$$

При помощи прокалиброванного таким образом эталона светового потока можно исследовать другие лампы, используя для этого интегратор (шар Ульбрихта). Этот шар работает по следующему принципу. Лампа помещается в шар, покрытый изнутри белым, диффузно отражающим составом. Световой поток, испускаемый этой лампой, пропорционален освещенности некоторого участка поверхности шара, в частности освещенности матового окошка, предназначенного для измерений. Непосредственному освещению окошка лампой препятствует затеняющий диск  $T$ . Кроме того, размеры лампы не должны сказываться на результатах измерения. Пропорциональность между световым потоком  $\Phi_{VQ}$  лампы  $Q$  и освещенностью окошка иллюстрируется на рис. 80. Световой поток,  $\Phi_V$ , исходящий из элемента поверхности  $dA_1$  и попадающий на окошко  $F$ , дает освещенность

$$E_{V_1} = \frac{\Phi_{V_1}}{F} = \frac{L_{V_1} dA_1 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^2},$$

где

$$\Phi_V = L_{V_1} dA_1 \cos \vartheta_1 \cdot \Omega, \quad \Omega = \frac{F \cos \vartheta_2}{r^2}.$$

Так как

$$\cos \vartheta_1 = \cos \vartheta_2 = \frac{r}{2R},$$

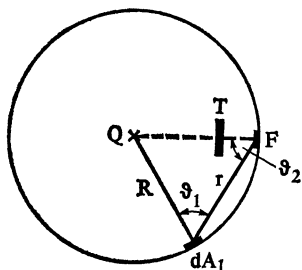


Рис. 80. Шар Ульбрихта.

то освещенность равна

$$E_{V_2} = \frac{L_{V_1} dA_1}{4R^2},$$

т. е.  $E_{V_2}$  не зависит от взаимного расположения  $dA_1$  и  $F$ . Освещенность элемента поверхности  $dA_1$ , обозначаемая через  $E_{V_1}$ , так же как и яркость  $L_{V_1}$ , пропорциональна световому потоку  $\Phi_V$ , исходящему из  $Q$ . Это справедливо для всех элементов поверхности  $dA_n$ , так что в целом освещенность окошка  $F$  пропорциональна полному световому потоку  $\Phi_{VQ}$ .

## 10.5. Фотометр

Фотометры применяются для измерения силы света, причем в визуальных фотометрах сравнение яркостей производится глазом, а в физических — детектором излучения, согласованным с  $V(\lambda)$ .

### а. Визуальный фотометр

Рассмотрим фотометр Люммера — Бродхуна (рис. 81). Два сравниваемых источника света  $Q_1$  и  $Q_2$  расположены на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от гипсовой пластины  $G$ , которую они освещают

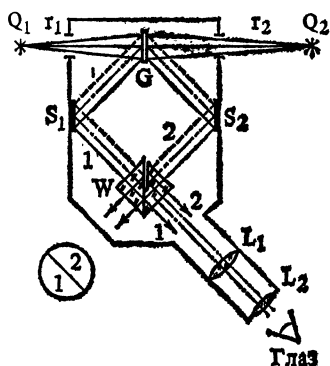


Рис. 81. Фотометр Люммера — Бродхуна.

с двух сторон. Зеркала  $S_1$  и  $S_2$ , отражающие свет от двух сторон гипсовой пластины, посылают его на так называемый кубик Люммера — Бродхуна  $W$ , который состоит из двух призм, прилегающих друг к другу своими основаниями. Половина основания одной призмы сточена, так что в этом месте нет контакта с другой призмой. Через тубус с линзой можно рассматривать поверхность касания обеих призм. Эта поверхность оказывается разделенной: одна половина ее получает свет от лампы  $Q_1$ , который полностью отражается основанием одной из призм. Перемещая фотометр вдоль линии, соединяющей  $Q_1$  и  $Q_2$ , можно достичь одинаковой освещенности наблюдаемой поверхности. Кроме изменения расстояния существуют и другие возможности ослабления света — использование вращающегося секторного диска или поляризационных фильтров. Достигаемая

при этом точность составляет 1%. Тогда

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2},$$

где предполагается, что оба составляющих луча отражаются от обеих сторон гипсовой пластины и проходят сквозь оптическую систему одинаковым образом.

#### *б. Физический фотометр*

В физических фотометрах, получивших преимущественное распространение в настоящее время, излучение преобразуется в электрический ток, величина которого служит мерой мощности излучения и мерой светового потока при согласовании с  $V(\lambda)$ . При этом либо с помощью термоэлемента определяется поглощенное излучение, превратившееся в теплоту, либо оценивается внутренний или внешний эффект (посредством фотоэлемента, фотоумножителя, фотосопротивления, фотополупроводника).

Прокалиброванным физическим фотометром можно непосредственно определять фотометрические величины, не сравнивая с эталонным источником света. Эти приборы предпочтительнее глаза, так как обладают большей точностью измерения и могут работать непрерывно. Поскольку их спектральная чувствительность, как правило, отличается от чувствительности глаза, она должна согласовываться с  $V(\lambda)$  путем применения светофильтров (а такую процедуру для разных детекторов проводят по-разному).



# Приложение I

## 1. Введение

После того как измерительный прибор прокалиброван и даже, может быть, получил официальное свидетельство об испытании, важным фактором становится то, что практические измерения имеют лишь ограниченную точность. При повторении измерения обнаруживается, что результаты в той или иной степени отличаются друг от друга, т. е. происходит разброс результатов. В ряде случаев показания округляют с избытком или недостатком и считают, что «истинное значение» лежит в некотором определенном интервале. Если же измерение повторяется в другом месте, в другое время и другим прибором, то оказывается даже, что найдены совершенно другие результаты, которые уже нельзя назвать разбросом. Тогда возникают сомнения, какой же результат считать «правильным». Это приводит к поиску ошибок измерения. Результаты измерений, претендующие на признание, должны снабжаться *указанием точности*, характеризующей разброс, а методы измерений должны тщательно учитывать систематические ошибки. Понятно, что для отыскания скрытых ошибок требуется много времени. Некоторые простые примеры помогут нам глубже разобраться в этом вопросе.

1. Длина комнаты измеряется 30-сантиметровой линейкой. Как бы тщательно мы ни измеряли расстояние этой линейкой, в результате получится длина ломаной, которая всегда больше измеряемой величины. Эту ошибку можно устранить использованием другого метода измерений. — Другая систематическая ошибка может возникнуть в том случае, если неверен масштаб (ошибка калибровки).

2. Диаметр кольца измеряется штангенциркулем. Для этого кольцо помещается между твердыми раздвижными пластинами штангенциркуля. При соприкосновении неизбежны малые деформации.

3. Путем измерения тока и напряжения определяется электрическое сопротивление (схема приведена на рис. 82). Предполагается, что калибровочные ошибки измерительных приборов отсутствуют. Если просто разделить измеренное напряжение на измеренный ток, то полученное сопротивление будет отличаться от действительного, потому что часть тока протекает через вольтметр. Необходимо по меньшей мере еще одно измерение, чтобы внести поправки на внутреннее сопротивление вольтметра.

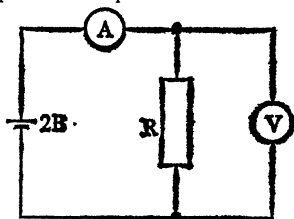


Рис. 82. Метод тока — напряжения для измерения сопротивления.

4. С помощью кривой нагревания измеряется удельная теплоемкость вещества. При подаче постоянной электрической мощности наблюдается повышение температуры испытуемого образца. Ошибки обусловлены тем, что образец постоянно отдает энергию (тепло) вследствие теплопроводности и (или) излучения. Этого можно избежать, окружив обра-

зец средой, температура которой все время равнялась бы температуре образца.

*Теория ошибок* исходит из того, что все систематические ошибки устранены и имеющийся *разброс результатов* измерений носит *статистический* характер. Не вдаваясь в детали, отметим, что разброс результатов измерений определяется функцией распределения (имеется в виду разброс вокруг истинного значения). Поэтому теория ошибок позволяет вычислить количественную меру точности и учесть ее следствия.

## 2. Элементарное исчисление ошибок

### 2.1. Стандартные отклонения в серии отдельных измерений

Пусть длина изделия измеряется штангенциркулем с делением нониуса 1/10 мм. Результаты 30-кратного повторения измерений приведены в табл. 12. Обычно из результатов измерений выводят среднее арифметическое  $\bar{l}$ , которое в данном случае равно

$$\bar{l} = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} l_i = 5,562 \text{ см.}$$

Это значение, заменяющее целую серию отдельных измерений, во-первых, удобно практически и, во-вторых, считается более «точным», чем результат каждого отдельного измерения. Это и подобные предположения, сформулированные в корректной математической форме, и составляют задачу исчисления ошибок.

Следующий важный шаг состоит в сведении всех полученных результатов измерений в диаграмму; по которой можно судить, насколько часто встречается одно и то же значение. Соединяя верхние точки горизонтальной линией, получим *гистограмму* частотного распределения измеряемых значений, которая дает визуальное представление о результатах измерения (рис. 83).

Если штангенциркуль с нониусом 1/10 мм заменить микро-

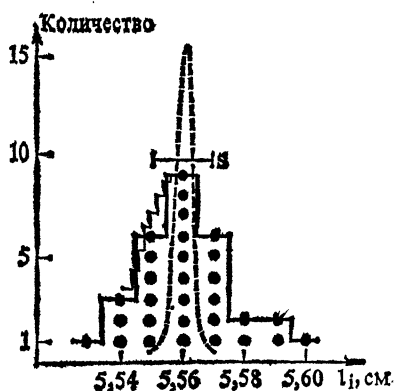


Рис. 83. Гистограмма измерения штангенциркулем.

Пунктирная линия — точное измерение.

Таблица 12

Данные измерений и исчисление ошибок  
при измерении длины

$i$	$l_i$ , см	$v$ , $10^{-3}$ см	$v \cdot v$ , $10^{-6}$ см <sup>2</sup>
1	5,56	—2	4
2	8	+18	324
3	5	—12	144
4	6	—2	4
5	6	—2	4
6	9	+28	784
7	5	—12	144
8	4	—22	484
9	6	—2	4
10	7	+8	64
11	6	—2	4
12	7	+8	64
13	9	+28	784
14	60	+38	1444
15	56	—2	4
16	3	—32	1024
17	7	+8	64
18	8	+18	324
19	5	—12	144
20	4	—22	484
21	5	—12	144
22	6	—2	4
23	7	+8	64
24	7	+8	64
25	5	—12	144
26	4	—22	484
27	5	—12	144
28	6	—2	4
29	6	—2	4
30	7	+8	64

$$\bar{l} = 5,562 \text{ см}, [v] = 0, [vv] = 7420 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2.$$

$$l = (5,562 \pm 0,003) \text{ см}.$$

метром с более мелкими делениями (2/100 мм), то *точность показаний* увеличится, а деления абсциссы станут соответственно в 5 раз меньше. В этом случае точки, нанесенные на гистограмму, будут приближаться к гладкой кривой. Но существенным является тот факт, что «ширина» кривой (т. е. гистограммы) ос-

танется при этом неизменной. Эта ширина характеризует как точность измерения, так и сам метод измерения. Если метод принципиально меняется (например, мы перешли к интерферометрическому способу измерения), то можно ожидать существенного повышения точности. В таком случае гистограмма будет острее (см. рис. 83). Можно сказать, что новое измерение «лучше» предыдущего. В основе усовершенствования метода могут лежать многие причины, например более тщательное обеспечение постоянства внешних условий (температуры, давления воздуха и т. д.). Кроме того, очевидно, что точность показаний должна соответствовать методу. Например, бессмысленно измерять рост человека катетометром<sup>1)</sup>, для этого вполне подходит сантиметровый масштаб.

Мерой ширины гистограммы и соответственно разброса результатов измерений относительно среднего арифметического по определению является *стандартное отклонение*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2}, \quad (1)$$

которое называется еще среднеквадратической ошибкой.

Вместо стандартного отклонения можно найти другую величину, характеризующую степень разброса или степень точности, например *средний разброс*

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |l_i - \bar{l}|. \quad (2)$$

В соответствии с (1) и (2) *относительная степень отклонения* и *относительная степень точности* определяются выражениями

$$\frac{s}{\bar{l}} \text{ и } \frac{\delta}{\bar{l}}, \quad (3)$$

которые можно задавать в процентах.

Отсюда видно, что центральную роль в теории ошибок играет среднее арифметическое.

## 2.2. Среднее арифметическое

Будем исходить из того, что при группировке результатов измерений в окрестности значения 5,56 см (в нашем примере) истинная длина лежит вблизи этого значения. Хорошего при-

---

<sup>1)</sup> Катетометр — лабораторный инструмент для точного измерения разности высот; состоит из зрительной трубы, перемещающейся вдоль вертикального проградуйрованного стержня. — *Прим. перев.*

ближения к истинному значению следует ожидать в том случае, когда эквивалентное значение определяется таким образом, чтобы стандартное отклонение измерения относительно эквивалентной величины было минимальным. В связи с этим Гаусс предложил метод «наименьших квадратов» (точнее, минимума суммы квадратичных ошибок). Пусть  $x$  — искомое эквивалентное значение. Следуя Гауссу, вводим

$$v_i = l_i - x$$

и обозначим квадратной скобкой  $[]$  сумму по  $i$  от 1 до  $n$ , например:

$$[v] = \sum_{i=1}^n v_i, \quad [vv] = \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

Таким образом,  $[vv]$  должно быть минимальным. Запишем это последовательно:

$$v_1 v_1 = l_1^2 - 2l_1 x + x^2,$$

$$v_2 v_2 = l_2^2 - 2l_2 x + x^2,$$

.

.

.

$$v_n v_n = l_n^2 - 2l_n x + x^2;$$

или короче

$$[vv] = [ll] - 2x[l] + nx^2;$$

минимум этого выражения относительно  $x$  получается путем приравнивания нулю первой производной. Находим

$$x = \frac{1}{n} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} = \bar{l}. \quad (4)$$

Смысл среднего арифметического заключается в том, что оно позволяет свести к минимуму *стандартное отклонение*. Как легко показать, в этом случае  $[v] = 0$ , что необходимо для контроля правильности вычисления среднего арифметического.

Наконец, остается проверить предположение, что среднее арифметическое «точнее» результата отдельного измерения, т. е. что оно меньше отклоняется от истинного значения, чем результаты отдельных измерений. Исследование этого вопроса не менее важно, чем предыдущие выкладки (разд. 2.4).

### 2.3. Гауссов закон распространения ошибок

Этот закон позволяет на основании ошибок отдельных величин получить единый результат. В качестве примера рассмотрим удельное сопротивление, определяемое формулой

$$\rho = R \frac{A}{l},$$

где величины  $R$  (сопротивление),  $A$  (сечение) и  $l$  (длина) должны быть измерены, и для их значений задаются погрешности в виде стандартных отклонений  $s_R$ ,  $s_A$  и  $s_l$ . Какая будет величина  $s_\rho$ ?

В случае *одной переменной* удобно дать геометрическую интерпретацию формулы  $s_y = f'(x)s_x$  (рис. 84). На основании предыдущих рассуждений получаем следующее. Очевидно, что для  $x$  измеряемые значения  $l_1, \dots, l_n$  дают  $\bar{x} = 1/n[l]$ . Для каждого  $l_i$  вычисляется соответствующее значение  $y_i$  как функция от  $l_i$ :  $y_i = f(l_i)$ . Теперь  $l_i = \bar{x} + v_i$ , так что в первом приближении ( $v_i$  считаются достаточно малыми)

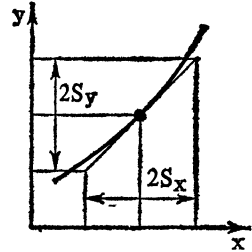


Рис. 84. К гауссову закону распространения ошибок.

$$y_i = f(v_i + \bar{x}) \approx f(\bar{x}) + v_i \frac{df}{dx} = \bar{y} + v_i \frac{df}{dx}.$$

Далее получаем

$$\Delta y_i = y_i - \bar{y} = v_i \frac{df}{dx},$$

так что

$$[\Delta y \Delta y] = \left( \frac{df}{dx} \right)^2 [v v],$$

Следовательно,

$$s_y = \frac{df}{dx} s_x. \quad (5)$$

В случае *большого числа переменных* вычисление совершенно аналогично. Пусть  $z = f(x, y, \dots)$ , а наблюдаемые величины суть  $x_i, y_i$  и т. д. Имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= f(x_1, y_1, \dots) = f(\bar{x} + v_1, \bar{y} + w_1, \dots) = \\ &= f(\bar{x}, \bar{y}, \dots) + \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} w_1 + \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\Delta z_1 = z_1 - \bar{z} = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} w_1 + \dots$$

Пренебрегая удвоенными произведениями и членами более высокого порядка, получаем

$$[\Delta z \Delta z] = f_x^2 [vv] + f_y^2 [ww] + \dots$$

Отсюда непосредственно следует закон распространения ошибок в виде

$$s_z = \sqrt{f_x^2 s_x^2 + f_y^2 s_y^2 + \dots} \quad (6)$$

В предложенной задаче функцией нескольких переменных является величина  $\rho = R \cdot A / l$ . Для нее имеем

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial R}\right)^2 = \frac{A^2}{l^2}, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial A}\right)^2 = \frac{R^2}{l^2}, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial l}\right)^2 = \frac{R^2 A^2}{l^4}.$$

Отсюда следует выражение для  $s_\rho$ :

$$s_\rho = \sqrt{\frac{A^2}{l^2} s_R^2 + \frac{R^2}{l^2} s_A^2 + \frac{R^2 A^2}{l^4} s_l^2}.$$

Пусть в результате измерений мы получили, например, следующие данные:

$$R = (10 \pm 0,2) \text{ Ом}, \quad A = (1 \pm 0,01) \text{ мм}^2 \quad \text{и} \quad l = (1 \pm 0,001) \text{ м}.$$

Тогда  $\rho = 10 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2 \cdot \text{м}^{-1}$  и  $s_\rho = 0,23$ , так что окончательно получаем

$$\rho = (10 \pm 0,23) \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}} = (10 \pm 0,23) \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Гауссов закон распространения ошибок можно использовать и для оценки условий, при которых сказываются отдельные ошибки. Для определения сопротивлений иногда применяют мостик Уитстона<sup>1)</sup>. Пусть  $x$  — длина участка цепи между измеряемым сопротивлением  $R$  и скользящим контактом,  $l$  — длина участка цепи между концами для сопротивлений,  $R_0$  — известное сопротивление. Тогда искомое сопротивление записывается в виде

$$R = R_0 \frac{x}{l-x}.$$

Ошибки измерения  $R_0$  и  $x$  учитываются в общей ошибке следующим образом:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial R_0}\right)^2 = \frac{x^2}{(l-x)^2}, \quad \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{l}{(l-x)^2}\right)^2 R_0^2,$$

т. е.

$$s_R = \sqrt{\frac{x^2}{(l-x)^2} s_{R_0}^2 + R_0^2 \left(\frac{l}{(l-x)^2}\right)^2 s_x^2}$$

<sup>1)</sup> Мостик Уитстона — это схема для определения неизвестного сопротивления  $R$  по величине известного сопротивления  $R_0$ . Он состоит из последовательно соединенных сопротивлений, свободные концы которых соединены прямым однородным проводом. Для измерения проходящего по цепи тока в нее включается амперметр, один контакт которого закреплен в точке соединения сопротивлений, а другой скользит вдоль соединяющего провода. — *Прим. перев.*

и

$$\frac{s_R}{R} = \sqrt{\frac{s_{R_0}^2}{R_0^2} + \left(\frac{l}{x(l-x)}\right)^2 s_x^2}.$$

Таким образом, ошибки оказываются особенно большими на концах измеряемого участка. Удобнее всего делать  $R_0$  таким, чтобы получить  $x=1/2$ .

Приведем последний пример. Пусть  $y$  — некоторая *степенная функция*,  $y=x^a$ . Тогда  $s_y = ax^{a-1}s_x$  и относительная ошибка определяется выражением

$$\frac{s_y}{y} = a \frac{s_x}{x},$$

т. е. относительная ошибка величины  $y$  получается умножением на  $a$  относительной ошибки величины  $x$ . Совершенно аналогично для  $y = \sqrt[a]{x}$  относительная ошибка уменьшается в  $a$  раз.

## 2.4. Стандартное отклонение среднего арифметического

Под средним арифметическим понимается величина, являющаяся функцией отдельных значений  $l_i$ , каждое из которых обладает одним и тем же стандартным отклонением  $s$ . Из равенства

$$\bar{l} = \frac{1}{n} (l_1 + l_2 + \dots + l_n)$$

получаем

$$\frac{\partial \bar{l}}{\partial l_i} = \frac{1}{n},$$

так что

$$s_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{1}{n^2} s^2 + \dots + \frac{1}{n^2} s^2} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Сюда можно подставить значение величины  $s$ , определенное в разд. 2.1, так как оно фактически описывает также и разброс, который соответствует отдельному измерению. Более точное статистическое обоснование можно найти в разд. 3.2. Итак, внося в предыдущее равенство значение  $s$ , получаем

$$s_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}. \quad (7)$$

Таким образом, стандартное отклонение среднего арифметического с возрастанием  $n$  убывает (оно обратно пропорционально



$\sqrt{n}$ ). Следовательно, выгодно с самого начала поддерживать стандартное отклонение выборки по возможности малым.

Полученный результат еще нельзя интерпретировать так, будто среднее арифметическое ближе к истинному значению, чем отдельное измерение. Об истинном значении еще не было речи, и в вывод уравнения (7) оно не вошло. Это в большой степени связано с тем, что при повторении серий по  $n$  испытаний обнаруживается разброс самих средних значений. Этот разброс меньше, чем разброс отдельных результатов. В дальнейшем мы рассмотрим «функцию распределения» для различных статистических величин, в том числе и для среднего арифметического; тогда и станет ясным смысл выражения, что среднее арифметическое точнее, чем результат отдельного измерения.

## 2.5. Взвешенное среднее

При рассмотрении среднего арифметического мы приходим к необходимости обработки результатов измерений различной точности. Пусть, например, одна группа экспериментаторов измеряет длину штангенциркулем, другая — оптическим методом. Нужно получить среднее из обоих результатов измерений. Другими словами, нужно скомбинировать *измерения различной точности*. Это осуществляется путем введения *веса*  $w_i$ , причем измерению большей точности соответствует больший вес. В таком случае среднее арифметическое формулируется в виде

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{[wx]}{[w]} = \frac{[wx]}{w_0}, \quad (8)$$

где  $w_0$  считается константой в смысле относительного весового распределения. Тогда, согласно гауссову закону распространения ошибок, стандартное отклонение среднего арифметического есть

$$s_x^2 = \frac{1}{w_0} (w_1^2 s_1^2 + \dots + w_n^2 s_n^2) = \frac{[w^2 s^2]}{[w]}. \quad (9)$$

Относительные веса определяются таким образом, чтобы  $s_x^2$  было минимальным. Из уравнения (9) следует

$$s_x^2 = \frac{1}{w_0} (w_1^2 s_1^2 + \dots + (w_0 - w_1 - \dots - w_{n-1})^2 s_n^2).$$

Минимизация означает, что для всех  $i$  выполняется равенство

$$\frac{\partial s_x^2}{\partial w_i} = 0,$$

так что

$$2w_i s_i^2 - 2w_n s_n^2 = 0,$$

или

$$w_i : w_n = \frac{1}{s_i^2} : \frac{1}{s_n^2}, \quad (10)$$

т. е. веса следует выбирать так, чтобы они были обратно пропорциональны стандартным отклонениям.

## 2.6. Прямая выравнивания

Исчисление ошибок иногда называют исчислением выравнивания. В этом случае под средним арифметическим понимают измеряемое значение, выравнивающее «ошибки» (таким образом, чтобы  $[v]=0$ ). Сказанное становится наглядным в случае исследования взаимосвязи с помощью измерительных приборов, когда эта взаимосвязь теоретически задается или предполагается линейной. Например, в случае пружинного маятника взаимосвязь между колеблющейся массой  $m$  и квадратом периода колебаний  $T$  линейна ( $f$  — постоянная пружины):

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{f}.$$

Другим примером линейной взаимосвязи является зависимость логарифма парового давления от обратного значения абсолютной температуры (см. разд. 2.3, стр. 15). С помощью хитроумного преобразования можно придать линейную математическую форму целому ряду взаимосвязей. Тогда естественно ожидать, что при нанесении результатов измерений  $y_i$ ,  $x_i$  на диаграмму получается ряд точек, напоминающий прямую. Через эти точки можно линейкой приближенно провести прямую (рис. 85).

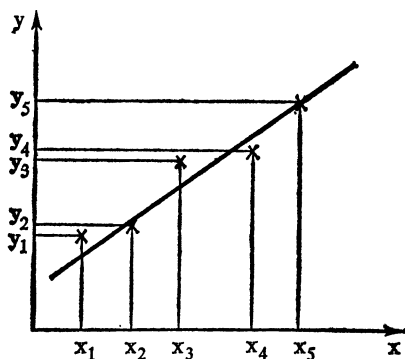


Рис. 85. Прямая выравнивания.

В случае повышенных требований к точности данные этой прямой выравнивания можно получить численным путем.

Пусть имеется *линейная взаимосвязь*  $y = tx + c$ . Примем, кроме того, что *независимая переменная  $x$  устанавливается без ошибки* (иначе задача чрезвычайно усложнилась бы; см. разд. 2.7). Величины  $t$  и  $c$  определены согласно гауссову закону, с помощью которого находится минимум суммы квадратичных ошибок. Исходное выражение имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - tx_i - c)^2. \quad (11)$$

Частное дифференцирование по  $t$  и  $c$  дает

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - tx_i - c) = -2 [xy] + 2t [xx] + 2c [x],$$

$$\frac{\partial S}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - tx_i - c) = -2 [y] + 2t [x] + 2nc.$$

Приравнявая обе производные нулю, получаем *нормальные уравнения* (с  $\bar{x} = (1/n)[x]$  и  $\bar{y} = (1/n)[y]$ ):

$$[xx]t + n\bar{x}c = [xy], \quad (11a)$$

$$\bar{x}t + c = \bar{y}. \quad (11b)$$

Для интересующих нас величин получаются выражения

$$t = \frac{[xy] - n\bar{x}\bar{y}}{[xx] - n\bar{x}^2}, \quad c = \frac{\bar{y}[xx] - \bar{x}[xy]}{[xx] - n\bar{x}^2}. \quad (12)$$

Без дальнейших вычислений укажем величину стандартного отклонения для величин  $t$  и  $c$ . Сначала вычисляется значение  $S$  для найденных величин  $t$  и  $c$ , оно обозначается  $S_{\text{мин}}$ . Далее имеем

$$s_t^2 = \frac{S_{\text{мин}}}{(n-2)([xx] - n\bar{x}^2)}, \quad (13a)$$

$$s_c^2 = \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{[xx] - n\bar{x}^2} \right) \frac{S_{\text{мин}}}{n-2}. \quad (13b)$$

Оказывается, что величина  $t$  уравнения (12) исчезает, т. е. результаты измерения  $y$  не зависят от  $x$ . В корректной форме это выглядит так: исчезновение числителя означает

$$\frac{1}{n}[xy] = \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{y}}.$$

В статистике это соотношение соответствует случаю, когда две величины  $x$  и  $y$  статистически независимы (или не скоррелированы).

Относительная простота выражений (12) и (13) вызывает желание линеаризовать имеющиеся задачи и теории или выбрать соответствующее представление.

Для примера рассмотрим *радиоактивный распад*. Радиоактивность со временем убывает экспоненциально:  $A = A_0 \exp(-\lambda t)$ . Величина  $\ln(A/A_0)$  в зависимости от временной координаты образует нисходящую прямую, наклон которой определяет константу распада. Другим важным примером является линеаризация представления *спектра* радиоактивного пучка  $\beta$ -частиц в верхней части спектра, известное под названием диаграммы Кюри. Это представление используется для определения предельной энергии  $\beta$ -частиц и массы покоя нейтрино.

## 2.7. Кривая выравнивания в случае, когда обе переменные имеют погрешности

В физике наблюдается очень мало случаев, когда независимые переменные точно известны. К ним относится, например, случай, когда независимая переменная является квантовым числом: одно из свойств атомного ядра зависит от квантового числа ядерного спина. В основном же независимые переменные задаются с известной ошибкой (например, температура при определении электрического сопротивления). Принципиально то, что почти всегда каждому значению  $x_i$  соответствует стандартное отклонение  $s_i$  и, следовательно, каждому значению  $y_i$  — стандартное отклонение  $t_i$ . Нахождение взаимосвязи между  $y$  и  $x$  называется *регрессионным анализом* данных. Если эта взаимосвязь линейна, то из измеряемых значений строится *прямая регрессии*.

Пусть измеренные пары функциональных значений и их стандартные отклонения суть

$$x_i \text{ и } s_i, \quad y_i \text{ и } t_i.$$

С одной стороны, необходимо определить выравниваемые величины  $X_i$  и  $Y_i$ , а с другой — численные значения  $m$  и  $c$  в соотношении

$$Y_i = mX_i + c.$$

Анализ основан на обобщении «минимума суммы квадратичных ошибок». Напомним, что измеряемые значения с малым стандартным отклонением точнее других и, следовательно, имеют больший вес. Веса выбираются согласно соотношению (10) на стр. 161. Находим минимум выражения

$$S = \sum_i \left[ (X_i - x_i)^2 \frac{1}{s_i^2} + (mX_i + c - y_i)^2 \frac{1}{t_i^2} \right]. \quad (14)$$

Он получается путем приравнивания нулю первой частной производной:

$$\frac{\partial S}{\partial X_i} = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{s_i^2} (X_i - x_i) + \frac{1}{t_i^2} m (mX_i + c - y_i) = 0.$$

Умножая на  $s_i^2 t_i^2$  и приводя подобные члены, получаем

$$(t_i^2 + s_i^2 m^2) X_i - t_i^2 x_i + s_i^2 (c - y_i) = 0,$$

или

$$X_i = W_i [t_i^2 X_i + s_i^2 (y_i - c)] \quad (15)$$

с эффективными весами <sup>1)</sup>

$$W_i = (t_i^2 + m^2 s_i^2)^{-1} \quad (16)$$

Аналогично закону распространения ошибок эти веса задаются через  $t_i^2$  и  $(dy/dx)^2 s_i^2$ . Учитывая полученные выражения для  $X_i$ , получаем для  $S$

$$S = \sum_i W_i (c + mx_i - y_i)^2. \quad (17)$$

Приравняем нулю производную  $\partial S / \partial c$ , что приводит к равенству  $c + m\bar{X} = \bar{Y}$ ,

где

$$\bar{X} = \sum_i W_i x_i / \sum_i W_i, \quad \bar{Y} = \sum_i W_i y_i / \sum_i W_i. \quad (18a)$$

Полагая

$$x'_i = x_i - \bar{X}, \quad y'_i = y_i - \bar{Y}, \quad (18b)$$

получаем

$$S = \sum_i W_i (m'_i - y'_i)^2. \quad (19)$$

Наконец, приравниваем нулю производную  $\partial S / \partial m$ . Тогда

$$\sum_i [2W_i x'_i (mx'_i - y'_i) - W_i^2 2ms_i^2 (mx'_i - y'_i)^2] = 0.$$

---

<sup>1)</sup> Предполагается, что ни  $t_i$ , ни  $s_i$  не обращаются в нуль.

Положим

$$z_i = W_i (t_i^2 x'_i + m s_i^2 y'_i) \quad (20)$$

и получим

$$m \sum_i W_i z_i x'_i = \sum_i W_i z_i y'_i,$$

так что

$$m = \frac{\sum_i W_i z_i y_i}{\sum_i W_i z_i x'_i}, \quad c = \bar{Y} - m \bar{X}. \quad (21a, б)$$

Эта формула представляет собой простое выражение для  $m$ , однако величина  $m$  сама должна содержаться в  $W_i$ ! Поэтому Вильямсон [83, 84] предложил итерационное решение, которое в несколько шагов приводит к определению  $m$  (и  $c$ ). Процедура начинается с некоторого оцененного значения  $m$  (или даже с  $m=0$ ), при помощи которого вычисляется  $W_i$ , а затем из (21) — новое значение  $m$ . Затем все повторяется сначала. Критерием правильности метода является тот факт, что при перестановке местами  $x_i$  и  $y_i$  положение прямой выравнивания не меняется и что  $m(X, Y) = (m(Y, X))^{-1}$ . В упомянутой работе Вильямсона содержатся также формулы для стандартного отклонения величин  $m$  и  $c$ . Чтобы получить их, сначала вычисляют вспомогательные величины

$$\bar{Z} = \sum_i W_i z_i / \sum_i W_i, \quad z'_i = z_i - \bar{Z} \quad (22)$$

и

$$Q^{-1} = \sum_i W_i \left[ x'_i y'_i \frac{1}{m} + 4 z'_i (z_i - x'_i) \right]. \quad (23)$$

Тогда

$$s_m^2 = Q^2 \sum_i W_i^2 (x_i'^2 t_i^2 + y_i'^2 s_i^2) \quad (24)$$

и

$$s_c^2 = \frac{1}{\sum_i W_i} + 2 [\bar{X} + 2\bar{Z}] \bar{Z} Q + (\bar{X} + 2\bar{Z})^2 s_m^2. \quad (25)$$

Приведенный метод вполне пригоден для ЭВМ, которые могут очень быстро провести итерацию.

Проиллюстрируем сказанное примером, в котором осуществляется систематическое изменение ошибок для  $x$  и  $y$ , для того чтобы выявить их влияние на отрезок оси  $c$  и наклон  $m$  прямой выравнивания  $y = mx + c$ , а также на стан-

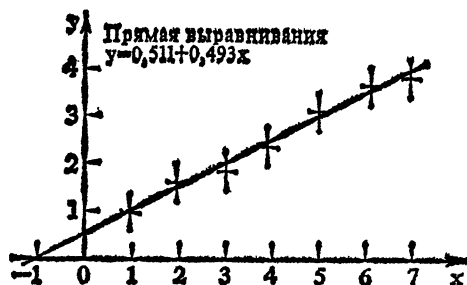


Рис. 86. Измеряемые значения и прямая выравнивания для данных из табл. 14 (случай II).

дартные отклонения величин  $m$  и  $s$ . Рассматриваются следующие случаи (табл. 13, 14): сначала в соответствии с разд. 2.6 вычисляется кривая выравнивания, т. е. ошибки величин  $x$  и  $y$  приравниваются нулю; в коэффициенты  $m$  и  $s$  входит лишь разброс точек измерения. В других случаях учитываются стандартные отклонения для  $x$  и  $y$ . При вычислении используется метод Вильямсона. На

Таблица 13

Прямая выравнивания без учета ошибок в  $x$  и  $y$

$i$	$x_i$	$y_i$	
1	0,95	0,95	$s_i=0$
2	1,95	1,60	
3	3,00	1,85	$t_i=0$
4	3,90	2,35	
5	5,00	3,10	$c=0,514 \pm 0,10$
6	6,10	3,65	$m=0,492 \pm 0,026$
7	6,95	3,80	

Таблица 14

Прямые выравнивания с учетом задания ошибок относительно  $x$  и  $y$

$i$	$x_i$	$y_i$	I	II	III
1	0,95	0,95	$s_i=0,2$	$s_i=0,2$	$s_i=0,4$
2	1,95	1,60			
3	3,00	1,85	$t_i=0,2$	$t_i=0,4$	$t_i=0,2$
4	3,90	2,35			
5	5,00	3,10	$c=0,509 \pm 0,174$	$c=0,511 \pm 0,313$	$c=0,505 \pm 0,208$
6	6,10	3,65			
7	6,95	3,80	$m=0,493 \pm 0,009$	$m=0,493 \pm 0,016$	$m=0,494 \pm 0,010$

рис. 86 представлены измеряемые значения, стандартные отклонения величин  $x$  и  $y$ , а также прямая выравнивания согласно табл. 14 (случай II). Анализ численных данных показывает, что значения  $s$  и  $t$  при учете стандартных отклонений установочной величины  $x$  и измеряемой величины  $y$  испытывают лишь малые колебания. Вместе с тем стандартные отклонения величин  $s$  и  $t$  подвергаются значительному влиянию, т. е. возможен больший произвол в расположении прямой выравнивания.

Для проверки внутренней непротиворечивости применяемых методов поменяем местами  $x$  и  $y$ . В результате получим ту же самую прямую выравнивания. Это выполняется для всех приведенных случаев. Например, в случае II (табл. 14) имеем

$$\bar{m} = 2,029, \quad \bar{c} = -1,037,$$

т. е. (как и ожидалось) значение, обратное  $m$ , и точку пересечения прямой выравнивания II с осью  $x$ .

### 3. Некоторые теоретические основы исчисления ошибок

#### 3.1. Относительная частота, вероятность, плотность вероятности, нормальное распределение

Вернемся к примеру из разд. 2.1, где измерялась длина. Жирная линия на рис. 83 определяет для каждого значения абсциссы частоту, с которой это значение встречается. Сумма частот равна полному числу измерений:

$$\sum_i H_i = n.$$

Теперь введем *относительную частоту*

$$h_i = \frac{1}{n} H_i.$$

Для нее, естественно, справедливо равенство

$$\sum_i h_i = 1.$$

Таким образом, относительные частоты нормируются на единицу. Если проводится другая серия, содержащая 30 измерений, то обнаруживается, что относительные частоты получают другие численные значения. Но опыт показывает, что увеличение полного числа измерений всегда приводит к уменьшению колебаний относительных частот. Поэтому мы приходим к *гипотезе*: с увеличением числа измерений каждая отдельная относительная частота приближается к некоторому определенному предельному



значению. Такая относительная частота называется *вероятностью* получения измеряемого значения. Математическая теория исходит из того, что существует величина

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} h_i(n).$$

Опуская детали этой фундаментальной проблематики, обратимся к ее следствиям. Вероятности  $p_i$ , так же как и относительные частоты, нормируются на единицу. Гистограмма на рис. 83 вполне корректно характеризует это обстоятельство с учетом ограниченной точности. Повышение точности приводит к сглаживанию гистограммы, так что бесконечно увеличивая точность, можно получить гладкую кривую. Ее можно рассматривать в том смысле, что  $p(x)\Delta x$  представляет собой вероятность нахождения результата измерения в интервале  $\Delta x$ . Тем самым мы вновь перешли к ограниченной точности: из кривой  $p(x)$  можно получить все вероятности, определяемые тем, что измеряемая величина  $x$  лежит в конечном интервале  $\Delta x = x_1, \dots, x_2$ :

$$p(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$$

Величина  $p(x)$  называется *плотностью вероятности*. Проводить различие между вероятностью и плотностью вероятности необходимо в том случае, когда независимая переменная непрерывна. Это справедливо, например для длин, времени и т. д. Теперь подойдем к вопросу с другой стороны и рассмотрим выпадение, например, числа «2» при бросании игральной кости. Отличительными признаками броска являются числа 1, 2, ..., 6, представляющие собой дискретные переменные. Ключом к обобщенной трактовке отличительных признаков является упомянутая модификация понятия вероятности. Теперь под этим понимается *вероятность* того, что признак имеет значение, лежащее между допустимым минимальным значением (которое может равняться и  $-\infty$ ) и предполагаемым значением  $X$ :

$$P \equiv P(x_{\min} \leq x \leq X).$$

*Плотность вероятности* — это величина

$$p(X) = \frac{dP}{dX}.$$

Отсюда видно, что  $P$  является интегральной величиной. В математике определены римановы интегралы, имеющие дело с функциями, которые не являются непрерывными и дифференцируемыми, так что допускается весьма обширное поле вероятностей,

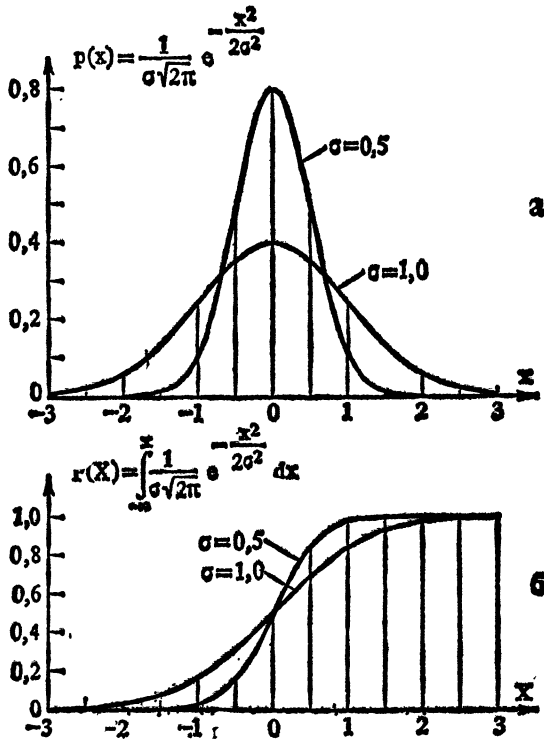


Рис. 87. Плотность вероятности  $p(x)$  и вероятность  $P(X)$  для нормального распределения.

Вероятность должна обладать свойством

$$P(x_{\min}) = 0, \quad P(x_{\max}) = 1,$$

т. е.

$$P(x_{\min} \leq x \leq x_{\max}) = 1.$$

Относительно  $p(x)$  это означает, что функция нормирована на единицу.

На рис. 87 изображена так называемая колоколообразная кривая Гаусса, которая, будучи *нормальным распределением*, играет центральную роль в теории ошибок. При этом

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (1)$$

и

$$P(-\infty < x \leq X) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^X e^{-x^2/2\sigma^2} dx. \quad (2)$$

Взаимосвязь с так называемой функцией ошибок <sup>1)</sup> дается преобразованием  $t^2 = x^2/2\sigma^2$ :

$$P(-\infty < x \leq X) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x/\sigma \sqrt{2}} e^{-t^2} dt \right). \quad (3)$$

В дальнейшем мы будем говорить о функции плотности и функции распределения, тщательно разграничивая понятия *плотности вероятности* и *вероятности*. Отметим, что нормальное распределение обладает функцией плотности  $p(x)$  и функцией распределения  $P(X)$  [уравнения (1) и (2)].

Значение нормального распределения состоит в том, что в подавляющем большинстве случаев ошибки измерения  $\varepsilon$ , означающие здесь отклонения от истинного значения  $\hat{x}$ , подчиняются функции распределения, которая соответствует нормальному распределению. Можно показать, что когда многие отдельные ошибки согласованы, то при известных предположениях всегда получается нормальное распределение (центральная предельная теорема). Таким образом, теоретическим фундаментом исследования ошибок является плотность вероятности

$$p(\varepsilon) = C^2 \exp(-C_1 \varepsilon^2). \quad (4)$$

Константы определяются из условия нормировки  $p(\varepsilon)$  на единицу. Следовательно,  $C^2 = C_1/\sqrt{\pi}$ . Константа  $C_1$  пока еще неизвестна. Она определяет два характеристических значения функции, а именно: значение при  $\varepsilon=0$  и ширину (отрезок абсциссы, соответствующий половине значения функции в центре). Нормированная функция плотности нормального распределения записывается в форме

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5)$$

Рассмотрение кривой показывает (рис. 88), что функция плотности нормального распределения тем уже, чем меньше  $\sigma$ . Максимум соответствует значению  $\varepsilon=0$ , а точки перегиба —  $\pm\sigma$ . Полная ширина половинного значения <sup>2)</sup> составляет  $2,3550\sigma$ .

В смысле предыдущего обсуждения *точное измерение* — это измерение с малым разбросом  $\sigma$ , а неточное — с большим. По аналогии с разд. 2.1 введем *дисперсию*, определив ее выражением

$$s^2 = \hat{\varepsilon}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 p(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\varepsilon) d\varepsilon} = \sigma^2.$$

<sup>1)</sup> Таблицы см., например, в работе [85].

<sup>2)</sup>  $p(\varepsilon^{1/2}) = 1/2 p(0)$ .

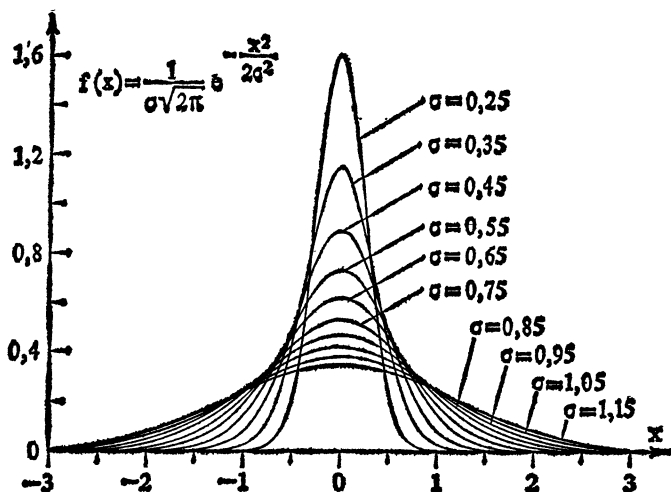


Рис. 88. Серия гауссовых функций плотности распределения ошибок. Все функции нормированы на единицу. Ширина кривых тем уже, чем меньше  $\sigma$ .

Функция плотности распределения ошибок является специальной функцией, и ее максимум соответствует значению  $\varepsilon=0$ . Нормально распределенная величина с *медианой*<sup>1)</sup>  $a$  имеет функцию распределения

$$f(l) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(l-a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (6)$$

Медиану, образованную теоретической функцией плотности, в отличие от среднего арифметического измеряемой величины назовем *математическим ожиданием* и обозначим через  $\hat{G}$ . В соответствии с этим дисперсия  $\hat{\varepsilon}^2$  является математическим ожиданием квадратичного отклонения  $\varepsilon^2$ . Математическое ожидание величины  $l$ , вычисляемое с помощью функции плотности (6), есть

$$\hat{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} lf(l) dl = a,$$

т. е. равно медиане функции плотности<sup>2)</sup>. Заметим, что отсюда вытекает неравенство  $\sigma \ll \hat{l}$ . Теперь можно продолжить интеграл до  $l=-\infty$ .

<sup>1)</sup> Медиана — значение в центре.— *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Соответственно  $\hat{\varepsilon}=0$ .

С помощью известной функции плотности можно определить математическое ожидание любой величины, в частности

$$s^2 = \hat{l}^2 - (\hat{l})^2 = \sigma^2,$$

что представляет собой определение дисперсии.

### 3.2. Среднее арифметическое выборки

Развитую ранее теорию ошибок мы рассматривали очень узко — исключительно с точки зрения нормального распределения. Чтобы приложить к этой теории исчисление ошибок, примем следующие условия относительно измерений: ошибки измерений неустраняемы, они всегда приводят к результатам, отклоняющимся от истинного значения или математического ожидания, хотя каждое измерение не зависит от предыдущих. Более того, мы приняли, что измеряемые значения «нормально распределяются» в соответствии с ошибками измерения. Серия отдельных измерений представляет собой *выборку*. Возникает вопрос о функции плотности для среднего арифметического, т. е. о величине, которая является функцией (простой, линейной) отдельной нормально распределенной измеряемой величины. Поэтому мы сначала задаем вопрос о функции плотности величины

$$z = x + y,$$

считая, что сами величины  $x$  и  $y$  нормально распределены, т. е. что соответствующие плотности вероятности имеют вид

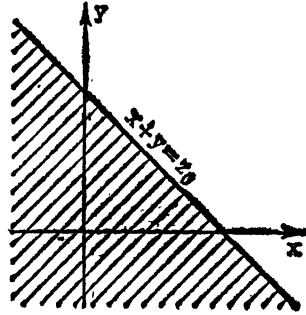
$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad g(y) = \frac{1}{\tau \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\tau^2}\right). \quad (7)$$

Функцию плотности для  $z$  мы находим несколько косвенным путем, используя определение вероятности из предыдущего раздела. Поскольку  $x$  и  $y$  должны быть независимы друг от друга, плотность вероятности есть просто произведение  $f(x)$  и  $g(y)$ , так что  $F(x, y)dx dy = f(x)g(y)dx dy$ . (8)

Это выражение должно означать вероятность нахождения  $x$  в интервале от  $x$  до  $x+dx$  и одновременно  $y$  — в интервале от  $y$  до  $y+dy$ . Этим интервалам соответствует определенный интервал  $(z, z+dz)$ , причем различные комбинации  $x$  и  $y$  приводят к одному и тому же интервалу  $z$ ; эти комбинации должны быть аддитивными. Обратимся к рассуждениям предыдущего раздела. Вероятность найти сумму  $x+y$  со значением, меньшим или равным  $z_0$  (рис. 89), равна

$$P(z \leq z_0) = \iint_{x+y \leq z_0} f(x)g(y)dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z_0-x} f(x)g(y)dy.$$

Рис. 89. Предел интегрирования для определения вероятности  $P(z)$ .



Полагая  $x+y=z$ ,  $dy=dz$ , получаем

$$P(z \leq z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z_0} f(x) g(z-x) dz = \int_{-\infty}^{z_0} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(z-x) dx. \quad (9)$$

Теперь роль функции плотности для  $z$  переходит к выражению

$$p(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(z-x) dx. \quad (10)$$

Применяя эту формулу к обоим заданным нормальным распределениям, найдем

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \exp\left(-\frac{(z-(a+b))^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\right). \quad (11)$$

Таким образом, сумма  $z$  также нормально распределена и имеет медиану  $a+b$  (или математическое ожидание  $\hat{z}$ ) и дисперсию

$$\sigma_z^2 = \sigma^2 + \tau^2. \quad (12)$$

Полученные результаты приводят к искомому выражению через среднее значение и дисперсию в выборке из  $n$  независимых измерений. Допустим, что каждое отдельное измерение является частным значением из нормального распределения и что все нормальные распределения имеют одинаковую медиану  $\bar{l}$  и одинаковую дисперсию  $\sigma^2$ . Полагая  $l_1 + l_2 + \dots + l_n = L$ , так что  $\bar{l} = L/n$ , получаем

$$p(L) dL = p(L) \frac{dL}{d\bar{l}} d\bar{l} = p(\bar{l}) d\bar{l}.$$

Следовательно,

$$p(\bar{l}) = p(L) n,$$

или

$$\begin{aligned} p(\bar{l}) &= \frac{n}{\sqrt{2\pi} \sqrt{n\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(n\bar{l} - (\hat{l} + \dots + \hat{l}))^2}{2n\sigma^2}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/n}} \exp\left(-\frac{(\bar{l} - \hat{l})^2}{2\sigma^2/n}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно, функция плотности среднего арифметического соответствует нормальному распределению вокруг математического ожидания (истинного значения)  $\hat{l}$ , и дисперсия равна

$$\sigma_{\bar{l}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (14)$$

Этот результат согласуется с формулой, найденной в разд. 2.4,

$$s_{\bar{l}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (15)$$

с той разницей, что в (14) присутствует неизвестная величина  $\sigma$ , а в (15) — величина  $s$  (стандартное отклонение), полученная путем измерений. В связи с этим возникает очень важный вопрос о замене неизвестной (теоретической) величины  $\sigma$  величиной  $s$ . Решение этого вопроса привело к значительному углублению теории ошибок.

### 3.3. Функция распределения дисперсии; $\chi^2$ -функция распределения

#### 3.3.1. Отличие среднего значения от математического ожидания

Речь идет об исследовании выражения для суммы квадратичных ошибок сначала относительно среднего арифметического, а затем относительно математического ожидания  $\hat{x}$ . Запишем это выражение:

$$\begin{aligned} \sum_i (x_i - \bar{l})^2 &= \sum_i ((x_i - \hat{x}) - (\bar{l} - \hat{x}))^2 = \\ &= \sum_i (x_i - \hat{x})^2 - 2 \sum_i (x_i - \hat{x})(\bar{l} - \hat{x}) + n(\bar{l} - \hat{x})^2 = \\ &= \sum_i (x_i - \hat{x})^2 - 2n(\bar{l} - \hat{x})(\bar{l} - \hat{x}) + n(\bar{l} - \hat{x})^2 = \\ &= \sum_i (x_i - \hat{x})^2 - n(\bar{l} - \hat{x})^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда видно, что сумма квадратичных ошибок относительно среднего арифметического в общем случае меньше суммы квадра-

точных ошибок относительно математического ожидания. Определяя стандартное отклонение, разделим это выражение не на  $n$ , а на  $n-1$  [разд. 2.1, уравнение (1)]. Теперь можно показать, что *математическое ожидание* величины  $s^2$  фактически есть  $\sigma^2$ . В таком случае все эквивалентные значения для математического ожидания переходят в строгую теорию.

Фундаментальным средством решающей проверки статистики является исследование функции распределения дисперсии.

### 3.3.2. Функция распределения суммы квадратов

В сумме квадратичных ошибок каждое слагаемое является статистической величиной, причем исходное распределение является нормальным распределением. Прежде чем вводить полную функцию распределения, получим  $\chi^2$ -распределение. Впервые оно было исследовано *Ф. Р. Гельмертом* (1876) и *К. Пирсоном* (1900). Итак, дано  $n$  случайных независимых переменных  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Математическое ожидание этих величин в отдельности пусть будет равно нулю, а разброс (ради простоты) единице. Тогда функция плотности для величин  $\xi_i$  будет иметь вид

$$f(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi_i^2\right).$$

Нас интересует функция распределения величины

$$\chi^2 = \chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Поскольку все  $\xi_i$  не зависят друг от друга, то вероятность того, что все  $\xi_i$  лежат в одном и том же интервале и сумма квадратов расположена ниже значения  $X^2$ , равна

$$P(\chi_n^2 \leq X^2) = \int_0^{X^2} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_n}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2\right). \quad (17)$$

Этот интеграл можно свести к известным функциям [86] <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} P(\chi_n^2 \leq X^2) &= \frac{2}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{X^2} \chi^{n-1} e^{-1/2 \chi^2} d\chi = \\ &= \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{X^2} (\chi^2)^{(n/2)-1} e^{-1/2 \chi^2} d(\chi^2). \end{aligned} \quad (18)$$

<sup>1)</sup>  $\Gamma$  — гамма-функция; таблицы имеются, например, в работе [85] (сноска 1, стр. 182). Для целочисленных  $m$   $\Gamma(m+1) = m!$



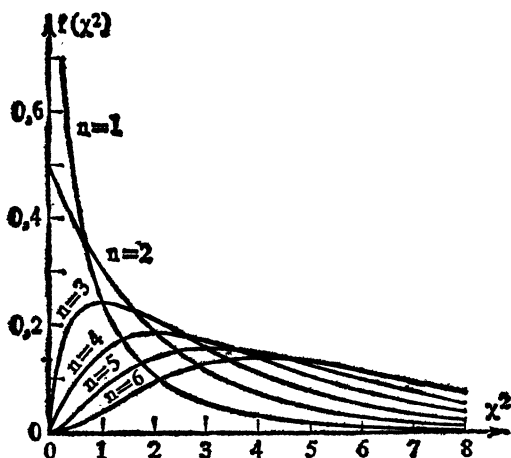


Рис. 90. Функция плотности  $\chi^2$ -распределения для  $n=1, 2, \dots, 6$ .  
Отдельные функции распределения представлены на рис. 95.

Теперь функция плотности для переменной  $\chi^2$  равна

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}. \quad (19)$$

Число  $n$  называется *числом степеней свободы*. В рассматриваемом частном случае оно равно числу переменных. Если между переменными существуют связи, то число степеней свободы уменьшается. Вычисление дает

$$\hat{\chi}^2 = n, \quad \sigma_{\chi^2}^2 = 2n,$$

так что если  $n$  произвольно возрастает, то

$$\frac{\sigma_{\chi^2}^2}{\chi^2} = \frac{\sqrt{2n}}{n} \rightarrow 0.$$

Максимум  $\chi^2$ -распределения соответствует значению

$$\chi_m^2 = n - 2$$

для  $n \geq 2$ ; кроме того, это имеет место при  $\chi^2 = 0$ . Таблицы функций  $\chi^2$  можно найти в работе [87] (до  $n=100$ ), сокращенную форму — в работе [69], таблицы вплоть до 10000 — в работе [88], вычислительную программу для функций  $\chi^2$  — в работе [89].

На рис. 90 изображены некоторые функции  $f(\chi^2)$ . Отсюда пока не видно, почему функция  $\chi^2$  играет фундаментальную роль. Это проявляется более отчетливо, если выбрать другой способ изображения: ускользание максимума устраняется путем

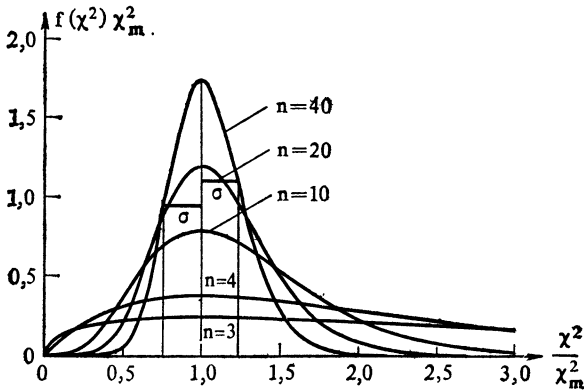


Рис. 91. Некоторые функции плотности  $\chi^2$ -распределения.

представления  $f(\chi^2)$  в виде функции от  $\chi^2/\chi_m^2$ . Сохраняя нормировку по вертикали, получаем

$$u = \chi^2/\chi_m^2, \quad \int_0^\infty f(\chi^2) d\chi^2 = 1 = \int_0^\infty g(u) du$$

с новой функцией плотности

$$g(u) = f(\chi_m^2 \cdot u) \chi_m^2.$$

Рис. 91 содержит некоторые из функций плотности. Отчетливо видно, что пик функции при  $\chi^2/\chi_m^2 = u = 1$  с ростом числа степеней свободы становится все острее. Это означает, что наибольшая вероятность для суммы соответствует значению  $\chi^2 = \chi_m^2$ . В частности, если число степеней свободы велико, это приводит к четкому решающему критерию при проверке гипотез или теорий.

### 3.3.3. Дополнение: распределение Максвелла по скоростям как пример $\chi^2$ -распределения

Для одной компоненты скорости молекул газа имеется нормальное распределение

$$f(v_x) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{mv_x^2}{2kT} \right),$$

причем  $\hat{v}_x = 0$ ,  $\sigma_v = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ . Функции распределения для  $v_y$  и  $v_z$  одинаковы. Компоненты скорости являются независимыми статистическими величинами. Нас интересует функция распределения для кинетической энергии одной молекулы. Запишем эту энергию:

$$E = \frac{1}{2} mv_x^2 + \frac{1}{2} mv_y^2 + \frac{1}{2} mv_z^2 = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Выражение в скобках — сумма квадратов трех нормально распределенных величин. Упрощая вычисление, положим

$$\frac{mv_x^2}{kT} = \xi_1^2, \quad \frac{mv_y^2}{kT} = \xi_2^2, \quad \frac{mv_z^2}{kT} = \xi_3^2.$$

Тогда

$$E = \frac{m}{2} \frac{kT}{m} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Величины в скобках нормально распределены с математическим ожиданием 0 и разбросом 1. Положим

$$\chi^2 = \frac{2E}{kT} = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2,$$

$$\xi_1 = \chi \cos \varphi_1 (\rightarrow v_z), \quad \xi_2 = \chi \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 (\rightarrow v_x),$$

$$\xi_3 = \chi \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 (\rightarrow v_y)$$

и получим

$$\begin{aligned} P(\chi^2 \leq X^2) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^X \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^2 d\chi \sin \varphi_1 d\varphi_1 d\varphi_2 = \\ &= \frac{1}{V\sqrt{2\pi}} \int_0^{X^2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} V\sqrt{\chi^2} d(\chi^2). \end{aligned}$$

Итак, функция плотности для энергии есть  $\chi^2$ -распределение с тремя степенями свободы:

$$g(E) dE = \frac{1}{V\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{E}{kT}} V\sqrt{\frac{2E}{kT}} d\left(\frac{2E}{kT}\right) = \frac{1}{V\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} V\sqrt{E} dE,$$

а функция плотности для скорости имеет вид

$$f(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 dv.$$

Если в качестве исследуемой системы взять один моль одноатомного газа ( $n=3N_A$ ), то точно так же найдем, что полная энергия  $U=\Sigma E_i$  представляет собой  $\chi^2$ -распределение с числом степеней свободы  $3N_A$  (это означает  $18 \cdot 10^{23}$  степеней свободы). Математическое ожидание энергии равно  $3/2 N_A kT$ , а относительная ширина

$$\frac{\sigma_{\chi^2}}{\hat{\chi}^2} = \frac{\sigma_U}{U} = \frac{V\sqrt{2\pi}}{n} \approx 10^{-12}.$$

### 3.3.4. Распределение квадрата стандартного отклонения

Будем исходить из того, что измеряемые значения  $x_i$  имеют нормальное распределение вокруг (истинного) значения  $\hat{x}$  с дисперсией  $\sigma^2$ . Для определения стандартного отклонения из отдельных результатов выборки со средним арифметическим  $\bar{x}$ .

была получена величина  $s^2$ . Теперь попытаемся вычислить распределение величины  $s^2$ . Для этого запишем

$$\chi^2 = (n-1) \frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}. \quad (20)$$

Простое преобразование приводит к выражению

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_i \frac{1}{\sigma^2} (x_i - \hat{x})^2 - \sum_i \frac{1}{\sigma^2} (\bar{x} - \hat{x})^2 = \\ &= \sum_i \frac{1}{\sigma^2} (x_i - \hat{x})^2 - n \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_j (x_j - \hat{x}) \right\}^2 = \\ &= \sum_i \frac{1}{\sigma^2} (x_i - \hat{x})^2 - \frac{n}{n^2} \left[ \sum_j \frac{1}{\sigma^2} (x_j - \hat{x}) \right]^2 = \\ &= \sum_i \xi_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_j \xi_j \right)^2, \end{aligned} \quad (21)$$

причем для нормального распределения  $\xi_i = 0$  и  $\sigma \xi_i = 1$ . Чтобы показать, что  $\chi^2$  можно записать в виде суммы квадратов (без удвоенных произведений), нам нужно выполнить еще одно линейное преобразование от  $\xi_1, \dots, \xi_n$  к  $\eta_1, \dots, \eta_n$ . Такое преобразование возможно [86] и означает лишь, что измеряемые значения линейризуются по-разному. Положим, например, что

$$\eta_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_j \xi_j = \frac{\bar{x} - \hat{x}}{\sigma} \sqrt{n}.$$

Отсюда следует, что

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - \frac{1}{n} n \eta_1^2 = \sum_{i=2}^n \eta_i^2 \quad (22)$$

и  $\eta_i$  всегда нормально распределены с разбросом 1. Из (22) вытекает, что, согласно соотношению (20), полученная величина является « $\chi^2$ -величиной», подчиняющейся  $\chi^2$ -распределению, причем не с  $\eta$ , а с  $n-1$  степенями свободы. Математическое ожидание равно

$$E(s^2) = \frac{\sigma^2}{n-1} (n-1) = \sigma^2. \quad (23)$$

Тем самым мы получили *квадрат стандартного отклонения как эквивалентную величину для дисперсии  $\sigma^2$* . Следовательно, мы правильно выбрали эквивалентное значение для  $\hat{x}$  и  $\sigma$ , взяв  $\hat{x}$  и  $s$ .

### 3.3.5. Уменьшение числа степеней свободы

При определении  $\chi^2$ -распределения  $n$  случайных величин было получено распределение с  $n$  степенями свободы. Распреде-

ние дисперсии (или квадрата стандартных отклонений) представляло собой  $\chi^2$ -распределение с  $n-1$  степенями свободы. Уменьшение числа степеней свободы произошло потому, что дисперсия вычислялась не относительно  $\hat{x}$ , а относительно  $\bar{x}$ , т. е. относительно величины, которая сама была получена из исходных данных. При этом  $\bar{x}$  являлась линейной комбинацией этих данных.

Уменьшение числа степеней свободы происходит тогда, когда образуется линейная комбинация, относительно которой определяется дисперсия. Это легко показать на примере *прямой выравнивания* [90].

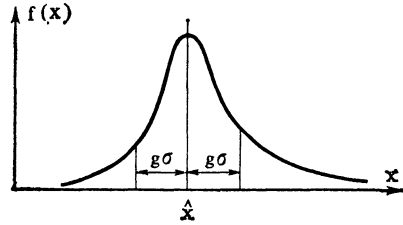
#### 4. Статистическое испытание измерений. Тесты

Исходя из предположения о том, что в основе отклонения результатов измерений от истинного значения лежат статистические ошибки, можно установить, с какой вероятностью встретится определенный результат. Так как при однократном измерении получается один определенный результат, а именно выборка, то он должен находиться вблизи наиболее вероятного значения. Однако ясно, что в такой форме это требование ненадежно, поскольку все высказывания насчет получения определенного результата являются вероятностными, и их можно аппроксимировать только путем многократного повторения измерения. Вместе с тем в течение последних десятилетий большое значение приобрели тесты, приводящие к принятию или отбрасыванию гипотезы. Дело в том, что для сравнения с теорией можно проводить обширные вычисления с помощью больших вычислительных машин на основе параметрических программ поиска. Поэтому широкое распространение получил  $\chi^2$ -тест. Этот тест носит настолько общий характер, что его можно использовать как критерий оптимального определения натуральных констант из целой серии измерений [91] (сноска 1, стр. 103).

##### 4.1. Неравенство Чебышева

Это неравенство дает весьма обобщенную оценку появления измеряемых величин вне максимума функции распределения. На рис. 92 изображена функция плотности, для которой существует дисперсия  $\sigma$ . Кроме того, на график нанесен отрезок  $g \cdot \sigma$ . Неравенство Чебышева отвечает на вопрос о вероятности появления значений  $x$ , которые лежат на расстоянии, большем  $\pm g\sigma$  от математического ожидания  $\hat{x}$ . Будем исходить из определения

Рис. 92. Плотность функции и границы оценок Чебышева.



дисперсии

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \hat{x})^2 f(t) dt,$$

или

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+g\sigma} \dots + \int_{+g\sigma}^{\infty} \dots, \text{ соответственно } \sigma^2 = \int_{-\infty}^{-g\sigma} \dots + \int_{-g\sigma}^{\infty} \dots$$

Тогда

$$\sigma^2 = \int_{(\geq 0)}^{+g\sigma} + \int_{g\sigma}^{\infty} \geq \int_{g\sigma}^{\infty} \geq g^2 \sigma^2 \int_{g\sigma}^{\infty} f(t) dt = g^2 \sigma^2 \cdot P(x - \hat{x} \geq g\sigma)$$

и

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{-g\sigma} + \int_{-g\sigma}^{\infty} \geq \int_{-\infty}^{-g\sigma} \geq g^2 \sigma^2 \int_{-\infty}^{-g\sigma} f(t) dt = g^2 \sigma^2 \cdot P(\hat{x} - x \geq g\sigma).$$

Отсюда следует, что

$$P(|x - \hat{x}| \geq g\sigma) \leq \frac{1}{g^2}, \quad (1)$$

так что

$$P(|x - \hat{x}| \geq \sigma) \leq 1, \quad P(|x - \hat{x}| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9},$$

$$P(|x - \hat{x}| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}, \quad P(|x - \hat{x}| \geq 10\sigma) \leq \frac{1}{100}.$$

Неравенство Чебышева интересно тем, что для доказательства его справедливости необходимо лишь очень малое число предположений. Функции распределения, часто встречающиеся при тестах и в других случаях, дают более строгие ограничения.

## 4.2. Биномиальное распределение

Это распределение является базисным для всех выборочных распределений. Пусть  $p$  — вероятность определенного события при некотором испытании (например, вероятность того, что из

урны будет вынут белый шар), а  $n$  — число проводимых испытаний. Тогда вероятность найти в выборке объемом  $n$  число  $x$  искомых событий равна

$$W(n, x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad (2)$$

где  $x=0, 1, \dots, n$ . Легко видеть, что  $\sum_x W(n, x) = 1$ , поскольку

$$\sum_x W(n, x) = \sum_x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Функция  $W(n, x)$  имеет максимум при  $x \approx np$ ; математическое ожидание величины  $x$  есть

$$\hat{x} = E(x) = \sum_x x W(n, x) = np. \quad (3)$$

Дисперсия следует из равенства

$$\sigma_x^2 = E[(x - \hat{x})^2] = \sum_x (x - \hat{x})^2 W(n, x) = E(x^2) - [E(x)]^2,$$

подставляя в которое выражение

$$E(x^2) = \sum_x x^2 W(n, x) = \sum_x (x(x-1) + x) W(n, x) = \hat{x} + p^2 n(n-1),$$

получаем

$$\sigma_x^2 = \hat{x}(1-p) = np(1-p), \quad \sigma_x = \sqrt{np(1-p)}. \quad (4)$$

В случае  $p \ll 1$  имеем  $\sigma_x \approx \sqrt{\hat{x}} = \sqrt{np}$ .

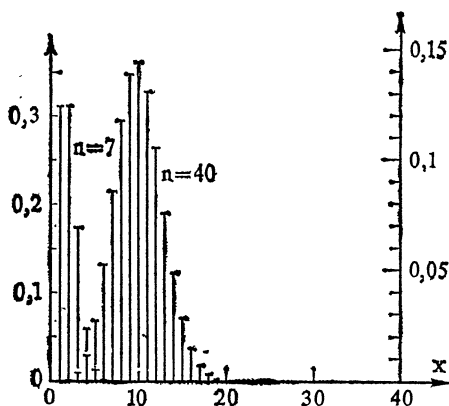
Табл. 15 содержит некоторые значения биномиального распределения для  $p=1/4$ . Для сравнения на рис. 93 наряду со слу-

Таблица 15

Некоторые вероятности биномиального распределения,  $p=1/4$

$n$	$W(n, 0)$	$W(n, 1)$	$W(n, 2)$	$W(n, 3)$	$W(n, 4)$	$W(n, 5)$	$W(n, 6)$	$W(n, 7)$
1	0,75	0,25						
2	0,562	0,375	0,063					
3	0,422	0,422	0,141	0,016				
4	0,316	0,422	0,211	0,047	0,004			
5	0,237	0,395	0,264	0,089	0,015	0,001		
6	0,178	0,356	0,300	0,132	0,033	0,004	0,000	
7	0,133	0,311	0,311	0,173	0,058	0,012	0,001	0,000

Рис. 93. Биномиальные распределения  $W(n, x)$  для  $n=7$  (левая шкала) и  $n=40$  (правая шкала),  $p=0,25$ .



чаем  $n=7$  представлено распределение для  $n=40$ . Для этих случаев

$$\begin{aligned}\hat{x} &= 1,75, & \sigma_x &= 1,14, & (n &= 7), \\ \hat{x} &= 10, & \sigma_x &= 2,74, & (n &= 40).\end{aligned}$$

Приняв  $g=2$ , найдем вероятность для границ:

$$x = 1,75 + 2,28 = 4,03,$$

$$x = 10 + 5,48 = 15,48.$$

Возьмем из табл. 15 значение для  $n=7$ :

$$P(n=7, x \geq 4) = 0,071.$$

Для  $n=40$  вероятность можно получить из рис. 93:

$$P(n=40, x \geq 15) = 0,054.$$

Неравенство Чебышева дает в этом случае

$$P(x - \hat{x} \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4} = 0,25.$$

Таким образом, биномиальное распределение действительно накладывает существенно более сильные ограничения.

В случае  $p=1/2$  биномиальное распределение в интервале  $0 \leq x \leq n$  симметрично.

### 4.3. Распределение Пуассона

Если вероятность  $p$  очень мала, а число испытаний  $n$  очень велико, то нормальное распределение при  $p \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow \infty$  (причем  $np = \text{const}$ ) переходит в распределение Пуассона, которое применяется, в частности, в численных экспериментах, связанных с



радиоактивностью. Примем  $np=K$ . Имеем

$$\begin{aligned} W(n, x) &= \frac{n(n-1) \dots (n-x+1)}{1 \cdot 2 \dots x} \left(\frac{K}{n}\right)^x \left(1 - \frac{K}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \frac{K^x}{x!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \left(1 - \frac{K}{n}\right)^n \left(1 - \frac{K}{n}\right)^{-x}. \end{aligned}$$

Так что при  $n \rightarrow \infty$

$$W(n, x) \frac{K^x}{x!} e^{-K} = W(K, x). \quad (5)$$

Это и есть распределение Пуассона. Для него вновь справедливо равенство

$$\sum_x W(K, x) = e^{-K} \left(1 + \frac{K}{1!} + \frac{K^2}{2!} + \dots\right) = e^{-K} e^K = 1.$$

Математическое ожидание величины  $x$

$$\hat{x} = E(x) = e^{-K} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{K^x}{x!} = e^{-K} K \sum_{x=1}^{\infty} \frac{K^{x-1}}{(x-1)!} = K. \quad (6)$$

Далее,

$$(\hat{x})^2 = E(x^2) = K^2 + K,$$

так что

$$\sigma_x^2 = E[(x - \hat{x})^2] = K, \quad \sigma_x = \sqrt{K}. \quad (7)$$

Наконец, распределение для суммы  $z=x+y$  двух величин  $x$  и  $y$ , которые подчиняются распределению Пуассона, снова будет распределением Пуассона, а именно

$$W(K_1, x, K_2, y) = \frac{K_1^x}{x!} e^{-K_1} \frac{K_2^y}{y!} e^{-K_2}$$

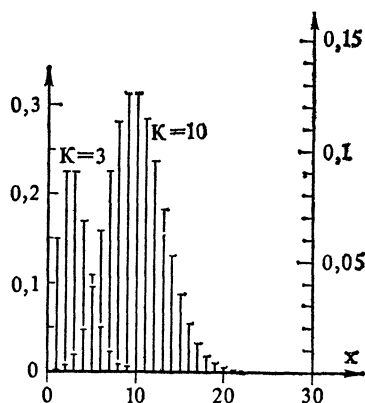
и

$$\begin{aligned} W(K, z) &= \sum_{x+y=z} W(K_1, x, K_2, y) = \\ &= e^{-(K_1+K_2)} \sum_{x=0}^z \frac{K_1^x K_2^{z-x}}{x! (z-x)!} = \\ &= e^{-(K_1+K_2)} \frac{1}{z} \sum_{x=0}^z \frac{z}{x! (z-x)!} K_1^x K_2^{z-x} = \\ &= e^{-(K_1+K_2)} \frac{1}{z} (K_1 + K_2)^z, \end{aligned}$$

т. е.  $K=K_1+K_2$ . Кроме того,

$$\sigma_z^2 = K_1 + K_2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \quad (8)$$

Рис. 94. Распределение Пуассона для  $K=3$  (левая шкала) и  $K=10$  (правая шкала).



Оценка с помощью неравенства Чебышева дает в этом случае

$$P(x - \hat{x} \geq g\sigma) = P(x - K \geq g\sqrt{K}) = P(x \geq K + g\sqrt{K}) =$$

$$= \sum_{x=K+g\sqrt{K}}^{\infty} \frac{K^x}{x!} e^{-K},$$

и вместе с тем

$$P(x - \hat{x} \geq \sigma) = 0,195,$$

$$P(x - \hat{x} \geq 2\sigma) = 0,05,$$

$$P(x - \hat{x} \geq 3\sigma) = 0,0075.$$

На рис. 94 сравниваются два распределения Пуассона: для  $K=3$  и  $K=10$ . Видно, что с ростом  $K$  распределение становится более симметричным. Впрочем, это имеет место и при биномиальном распределении совершенно независимо от  $p$ . Можно показать, что при  $n \rightarrow \infty$  оба эти распределения переходят в нормальное распределение.

#### 4.4. Метод минимума $\chi^2$ и $\chi^2$ -тест

Задача измерений в физике состоит в том, чтобы из результатов измерений, выраженных в числовых величинах, вывести закономерность или взаимосвязь. Измеряя напряжение и силу тока, выясняют, является ли их отношение (сопротивление) постоянной величиной. Измеряя степень распада радиоактивного вещества в зависимости от времени, определяют среднее время жизни вещества, так что «параметр» — скорость распада — и время связаны друг с другом. Измеряя мощность излучения ая-

тенны как функцию местоположения, исследуют, подчиняется ли диаграмма излучения функции  $\cos \vartheta$  или  $\cos^2 \vartheta, \dots$ , вообще можно ли выразить ее в виде ряда  $a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos^2 \vartheta + \dots + a_r \cos^r \vartheta$ , т. е. пытаются определить параметры  $a_0, \dots, a_r$  и т. д. Таким образом, как правило, стараются получить взаимосвязь

$$y = F(x, \Theta_1, \dots, \Theta_r).$$

Вместо  $x$  в этом выражении экспериментатор может подставить многие независимые переменные. Величины  $\Theta_1, \dots, \Theta_r$  могут быть либо искомыми параметрами, характеризующими теорию, либо константами, которые нужно определить. В приведенных примерах независимые переменные — это напряжение (или сила тока), моменты времени  $t_i$ , к которым относятся измерения в интервалах  $\Delta t$ ; местоположение относительно антенны. Проводится  $n$  измерений величины  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), дающих результаты  $y_i$  ( $i=1, \dots, n$ ). Кроме того, путем многократного повторения отдельных замеров или на основании других соображений нужно задать стандартное отклонение  $s_i$ . Таким образом выводится закон взаимосвязи измеряемых значений

$$x_i, y_i \text{ и } s_i (i=1, \dots, n).$$

В результате их сопоставления получают ожидаемые или теоретические значения измеряемых величин

$$F_i = F(x_i, \Theta_1, \dots, \Theta_r), \quad i=1, \dots, n.$$

Разумеется, численные значения величин  $F_i$  можно получить лишь в том случае, если известны параметры  $\Theta_1, \dots, \Theta_r$ , что не всегда выполнимо. Поэтому нужно по крайней мере ввести оценочные значения. Их можно уточнять, используя *метод минимума величины*  $\chi^2$ , который соответствует гауссову методу минимума суммы квадратичных ошибок (разд. 2.2). Образуем величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[y_i - F(x_i, \Theta_1, \dots, \Theta_r)]^2}{s_i^2} \quad (9)$$

и будем менять параметры  $\Theta_1, \dots, \Theta_r$ , пока (после достаточно продолжительного поиска) не получим значение  $\chi^2$ , которое (в рамках выбранной теории, т. е. речь идет о функции  $F$ ) уже нельзя уменьшить. С помощью вычислительной машины поиск параметров можно автоматизировать. Если связь достаточно проста (прямая выравнивания), то значения параметров можно вычислять непосредственно, приравнявая нулю соответствующие частные производные величины  $\chi^2$  по искомым параметрам <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Применение метода минимума величины  $\chi^2$  в случае, когда и  $x$  содержит ошибки, см. в работе [92].

После того как набор параметров  $\Theta_1, \dots, \Theta_r$  найден и тем самым установлен минимум величины  $\chi^2$ , нужно проверить, является ли это значение «разумным»; для этого служит  $\chi^2$ -тест. Такой тест возможен в случае, если выполняются определенные предположения, а именно: измеряемая величина  $y$  должна удовлетворять нормальному распределению относительно  $F(x, \Theta_1, \dots, \Theta_r)$  для каждого  $x$  и  $s_i$  должно быть эквивалентным значением величины  $\sigma(x_i)$ . Таким образом,  $s_i$  нужно выбирать не произвольно, а путем повторения измерения. При измерениях радиоактивного излучения нельзя повторить эксперимент в чистом виде, так как с течением времени радиоактивность вещества необратимо падает. Однако здесь можно воспользоваться распределением Пуассона. Было показано, что дисперсия равна квадрату среднего из числа отсчетов в единицу времени, т. е.  $s_i = \sqrt{y_i}$ .

Если высказанные предположения выполняются, то каждое из слагаемых в определяющем соотношении (9) для  $\chi^2$  будет нормально распределено с дисперсией 1. Величина  $\chi^2$  является статистической, ее плотность вероятности представляет собой  $\chi^2$ -функцию плотности (разд. 3.3), и можно показать, что число степеней свободы равно

$$n_F = n - r. \quad (10)$$

Из этой формулы видно, что результаты измерений связаны друг с другом параметром  $r$ , так что не являются полностью независимыми друг от друга.

Свойства  $\chi^2$ -распределения позволяют использовать его в тестах, проверяющих справедливость теории или «правильность» вычисления по результатам измерений. Они особенно отчетливо проявляются в том случае, если число точек измерения  $n$  велико, точнее, если велико число степеней свободы (порядка нескольких сотен). Особенно наглядно это отражено на рис. 97. При  $n_F \rightarrow \infty$

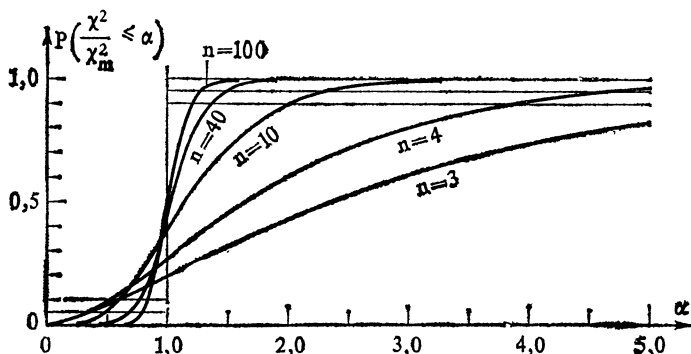


Рис. 95. Вероятность  $P(0 \leq \chi^2 \leq x^2)$   $\chi^2$ -функции распределения ( $\alpha = X^2/\chi_m^2$ ).

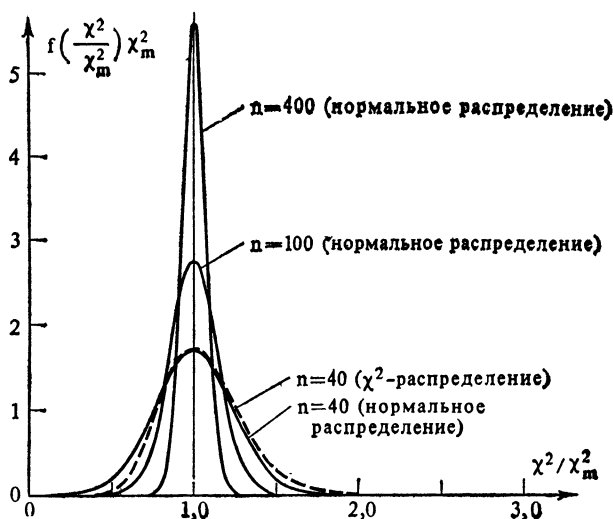


Рис. 96. Отклонение  $\chi^2$ -распределения от нормального распределения при большом числе степеней свободы.

плотность вероятности становится  $\delta$ -образной функцией, а  $P$  переходит в ступенчатую функцию с точкой скачка, соответствующей  $\alpha = X^2/\chi_m^2 = 1$  (рис. 95). В действительности число  $n_F$  во многих случаях велико. Но если оно составляет лишь несколько десятков, то  $\chi^2$ -тест будет значительно менее точным.

Следует заметить, что плотность  $\chi^2$ -распределения при больших  $n$  переходит в нормальное распределение:

$$g(\chi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\chi^2 - \chi_m^2)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (11)$$

где  $\sigma^2 = 2n$ ,  $\chi_m^2 = n - 2$ . На рис. 96 изображена серия соответствующих функций распределения. Видно, что нормальное распределение существенно отличается от  $\chi^2$ -распределения, так как при  $\chi^2 = 0$  ( $\chi^2 \geq 0$ ) нормальное распределение только в пределе  $n \rightarrow \infty$  принимает нулевое значение. В общем  $\chi^2$ -распределение асимметрично, но асимметрия уменьшается по мере стремления  $n$  к бесконечности.

$\chi^2$ -распределение используется в  $\chi^2$ -тесте в смысле оценки Чебышева. При этом

$$\hat{\chi}^2 = n_F, \quad \sigma_{\chi^2} = 2n_F, \quad \chi_m^2 = n_F - 2.$$

Если известно число степеней свободы (число точек измерения, используемых для определения численного значения  $r$ ), то  $P$  означает *вероятность, с которой некоторое значение  $\chi^2$  попадает в определенную ограниченную область, при условии, что отклонение результатов измерения от «теории» носит чисто статисти-*

ческий характер; тем самым теория «подтверждается». Постараемся доказать это утверждение [93].

Так как  $\chi^2$  — статистическая величина, то выражение  $\chi^2/n_F$  при однократном измерении может как угодно далеко отклоняться от единицы. Однако если  $n_F$  велико, то вероятность большого

Таблица 16

Результаты  $\chi^2$ -теста для вероятности ошибки 5% и 1% при 100 и 10 степенях свободы

		$n_F=100$		$n_F=10$	
		$\chi_T^2$	$\chi_T^2/\chi_m^2$	$\chi_T^2$	$\chi_T^2/\chi_m^2$
(1)	$P(0,05)$	77,93	0,79	3,94	0,49
(2)	$P(0,95)$	124,34	1,27	18,30	2,287
(1)	$P(0,01)$	70,06	0,71	2,56	0,32
(2)	$P(0,99)$	135,8	1,39	23,20	2,9

отклонения очень мала. Из табл. 16 видно, что при  $n_F=100$  вероятность для

$$0 \leq \chi^2 \leq \chi_T^2(1) = 77,93 \quad \text{и} \quad \chi_F^2(2) = 124,34 \leq \chi^2 < \infty$$

составляет 5%, т. е. в пяти случаях из ста ожидается появление в этом интервале величины  $\chi^2$ , а в 90 случаях из 100 величина  $\chi^2$  должна находиться в области

$$\chi_T^2(1) \leq \chi^2 \leq \chi_T^2(2)$$

(в окрестности  $\chi_m^2$ ). При одинаковом числе степеней свободы вероятность для

$$0 \leq \chi^2 \leq \chi_T^2(1) = 70,06 \quad \chi_T^2(2) = 135,8 \leq \chi^2$$

составляет 1%, а в 98% случаев величина  $\chi^2$  должна находиться в промежутке между значениями  $\chi_T^2(1)$  и  $\chi_T^2(2)$ . При относительно небольшом изменении границ области ( $77,93 \rightarrow 70,06$  и соответственно  $124,34 \rightarrow 135,8$ , т. е. примерно на 10%) соответствующие вероятности изменяются существенно (от  $P=5\%$  до  $P=1\%$ ).

Если в ходе эксперимента и последующего сравнения с теорией или гипотезой найдено определенное значение  $\chi_{\text{экс}}^2$ , то возникает вопрос, может ли (или должна ли) теория быть признанной или отвергнутой на основании этого значения. Для этого вернемся к  $\chi^2$ -распределению. Установим *доверительный уровень*, например 5%. Это должно означать, что весь  $\chi^2$ -интервал разде-

лен на три области, заданные для случая  $n_F=100$  и определяемые доверительным уровнем:

$$P_1=5\%, \quad P_2=90\%, \quad P_3=5\%.$$

Если результат измерения  $\chi^2_{\text{экс}}$  попадает во внешние области  $P_1$  или  $P_3$ , то теорию можно отвергнуть: вероятность ошибки составляет лишь 5%, т. е. даже если теория верна, то величина  $\chi^2_{\text{экс}}$  может попасть в эти области лишь с вероятностью 5%. Ошибочное решение об отбрасывании верной теории называется ошибкой первого рода. Вероятность ошибки можно уменьшить на 1%, если соответственно расширить  $\chi^2$ -интервал. Но, с другой стороны, имеется тенденция выбирать интервал, в котором встречается данный результат (вероятность  $P_2$ ), не особенно большим, так как из всех попадающих в этот интервал значений  $\chi^2_{\text{экс}}$  ни одно не отбрасывается, даже если основная гипотеза или теория неверна (ошибка второго рода).

В конце концов сошлись на 5%-ном критерии. Точность этого критерия, как видно из рис. 95, тем выше, чем больше число степеней свободы.

Следующий пример, сформулированный в виде конкретной задачи, является тем не менее типичным для целого ряда задач. В урне имеется 40 шаров. Производится 100 выборок, в каждой из которых отмечается число вынутых белых шаров (после каждой выборки шары возвращаются в урну). Найденные частоты приводятся в табл. 17.

Таблица 17

**Распределение частот в 100 выборках из 40 элементов**

Количество событий в выборке

8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Абсолютная частота  $H$

0 0 1 0 1 2 2 5 3 4 11 13 9 12 15 10 5 3 2 1 0 0 1 0 0

$$\bar{n} = \frac{1}{100} \sum_i x_i H_i = 20,09,$$

$$s^2 = \frac{1}{100-1} \sum_i (x_i - \bar{n})^2 H_i = 11,60,$$

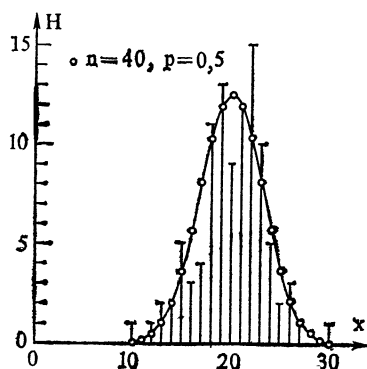
$$s = 3,41, \quad s_{\bar{n}} = \frac{3,41}{\sqrt{100}} = 0,34,$$

поэтому  $\bar{n} = 20,09 \pm 0,34$ .

Если же взять за основу биномиальное распределение, то получится

$$W(n, x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

Рис. 97. Сравнение экспериментальных частот с частотами биномиального распределения (таблица 18).



тогда  $\bar{n}=np$ ,  $\bar{s}^2=np(1-p)$ . При  $n=40$  следует

$$p = \frac{20,09}{40} = 0,502,$$

так что предположение о том, что  $p=0,5$ , кажется разумным. Сравним вычисленные частоты  $H_i$  с частотами биномиального распределения

$$B_i = 100 W(40, x_i) = 100 \binom{40}{x_i} 0,5^{x_i} 0,5^{40-x_i}.$$

В табл. 18 сопоставлены соответствующие числовые значения, а рис. 97 дает графическое представление, что обеспечивает визуальное сравнение результатов. Чтобы *применить*  $\chi^2$ -тест, вычисляем

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(H_i - B_i)^2}{s_i^2},$$

причем данные измерений часто группируются таким образом, чтобы в каждой группе содержалось по меньшей мере 5 чисел. Резюмируем полученные результаты: наборы  $\chi_i=8-14$  и  $\chi_i=25-32$  объединяются каждый в *одну* группу (эти две группы отнесены соответственно к  $\chi_i=11$  и  $29,5$ ) с частотами соответственно  $H_i=6$  и  $H_i=7$  и опорными значениями  $B_i=4,032$  и  $B_i=7,689$ .

Далее нужно ввести определенные значения для  $s_i$ , которые нельзя получить из измерения, так как для этого нужно знать разброс отдельных значений  $H_i$ . Оказывается, что для  $s_i^2$  можно просто ввести  $B_i$ . Это, безусловно, подтверждается для случая, когда распределение отдельных  $H_i$  удовлетворяет распределению Пуассона. Многочисленные испытания показывают, что мы не совершаем непоправимой ошибки, принимая  $s_i^2=B_i$  и образуя решающую величину

$$\chi^2 = \sum_i \frac{1}{B_i} (H_i - B_i)^2.$$

Здесь получается  $\chi^2=8,678$  с числовыми значениями, приведенными в табл. 18, и с обсуждавшейся уже группировкой в начале и в конце таблицы. Для использования  $\chi^2$ -теста необходимо некоторое число степеней свободы: мы образовали 12 групп и оценили один параметр ( $p$ ), следовательно, остается 11 степеней свободы. В цитированной работе Хартера [87] при доверительном уровне 5% имеются интервалы

$$0 \leq \chi^2 \leq 4,57 \text{ и } 19,68 \leq \chi^2 < \infty.$$



Таблица 18

## Экспериментальные и теоретические частоты

$x_i$	$H_i$	$B_i$
8	0	0,007
9	0	0,025
10	1	0,077
11	0	0,210
12	1	0,508
13	2	1,095
14	2	2,110
15	5	3,658
16	3	5,716
17	4	8,070
18	11	10,312
19	13	11,940
20	9	12,537
21	12	11,940
22	15	10,312
23	10	8,070
24	5	5,716
25	2	3,658
26	3	2,110
27	1	1,096
28	0	0,508
29	0	0,210
30	1	0,077
31	0	0,025
32	0	0,007

Найденное значение лежит в пределах от 4,57 до 19,68 и фактически вблизи  $\chi^2_{m=n_F-2}=9$ , т. е., согласно результатам  $\chi^2$ -теста, измеренное частотное распределение согласуется с биномиальным распределением при  $p=0,5$ .

## Приложение II

### Таблицы производных единиц и соотношений между единицами

#### 1. Производные единицы механики и термодинамики

Величина	Единица	Обозначение
Площадь	квадратный метр	м <sup>2</sup>
Объем	кубический метр	м <sup>3</sup>
	литр	л
Угол (плоский)	радиан	рад
	градус	°
	минута	'
	секунда	"
	гон	гон
Угол (телесный)	стерадиан	ср
Масса	грамм	г
	тонна	т
Линейная плотность массы	килограмм на метр	кг/м
Поверхностная плотность массы	килограмм на квадратный метр	кг/м <sup>2</sup>
Плотность	килограмм на кубический метр	кг/м <sup>3</sup>
Время (промежуток времени)	минута	мин
	час	ч
	сутки	сут
Частота	герц	Гц
Скорость	метр в секунду	м/с
Ускорение	метр на секунду в квадрате	м/с <sup>2</sup>
Угловая скорость	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение	радиан на секунду в квадрате	рад/с <sup>2</sup>
Поток объема	кубический метр в секунду	м <sup>3</sup> /с
Поток массы	килограмм в секунду	кг/с
Сила	ньютон	Н
Давление, механическое на- пряжение	паскаль бар	Па бар
Динамическая вязкость	паскаль-секунда	Па·с
Кинематическая вязкость	квадратный метр в секунду	м <sup>2</sup> /с
Энергия, работа и количество теплоты	джоуль	Дж

## Продолжение приложения II

Величина	Единица	Обозначение
Напряжение, поток энергии, ватт		Вт
поток теплоты		
Момент силы <sup>1)</sup>	ньютон·метр	Н·м
Импульс <sup>2)</sup>	ньютон·секунда	Н·с
Момент инерции	килограмм·квадратный метр	кг·м <sup>2</sup>
Момент импульса <sup>3)</sup>		Н·м·с·рад
Момент вращения		Дж·рад
Удельный объем		м <sup>3</sup> /кг
Удельная газовая постоянная		Дж/кг·К
Теплотворная способность		Дж/кг
Энтальпия		Дж
Удельная энтальпия		Дж/кг
Энтропия		Дж/К
Удельная энтропия		Дж/кг·К
Теплоемкость		Дж/К
Удельная теплоемкость		Дж/кг·К
Теплопроводность		Вт/м·К
Коэффициент теплопередачи		Вт/м <sup>2</sup> ·К

<sup>1)</sup> Величины, приведенные в таблице, начиная с этой, теперь уже не являются «законными» самостоятельными единицами. Их можно принять потому, что они образованы из «законных» величин.

<sup>2)</sup> Когерентная единица величины «масса·скорость» есть кг·м·с<sup>-1</sup>. Ввиду того что изменение импульса во времени равно силе, силовой удар можно рассматривать как величину, определяющую импульс, и тем самым ввести единицу Н·с. Аналогично образованы единицы момента импульса и момента вращения (сноска 3).

<sup>3)</sup> Аналогично импульсу и силе выбор этой единицы может зависеть от того, какое соотношение принять за основное. Момент импульса можно представить как произведение «момент инерции·угловая скорость». Тогда в единице момента импульса появится единица радиан. То же самое справедливо и для момента вращения.

Соотношения между единицами, включающие также единицы, которые давно не употребляются (+) или не употребляются с 1.01.78 (\*)

1 л	$= 1 \text{ дм}^3 = \frac{1}{1000} \text{ м}^3$
1 бар	$= 10^5 \text{ Па}$
1 г	$= 10^{-3} \text{ кг}$
1 т	$= 1000 \text{ кг}$
1 рад	$= 57,296^\circ = 57^\circ 17' 45''$
1 полный угол	$= 2\pi \text{ рад} = 360^\circ$
1°	$= \frac{\pi}{180} \text{ рад}, 1' = \frac{1^\circ}{60}, 1'' = \frac{1^\circ}{3600}$
1 гон	$= 0,9^\circ$
1 мин	$= 60 \text{ с}, 1 \text{ ч} = 60 \text{ мин}, 1 \text{ сут} = 24 \text{ ч} = 86\,400 \text{ с}$

## Продолжение приложения 11

*1 фут	= 12 дюйм ( $1' = 12''$ ) = 30,48 см
*1 мкм (микрон)	= $10^{-3}$ мм = $10^{-6}$ м
*1 эрг	= $10^{-7}$ Дж
*1 ат	= 1 кг/см <sup>2</sup> = 98 066,5 Па
*1 атм	= 101 325 Па
*1 м вод. ст.	= 0,1 ат = 9 806,65 Па
*1 мм рт. ст.	= 1 торр = $\frac{101\,325}{760}$ Па = 133,3224 Па
*1 гал	= 0,01 м/с <sup>2</sup>
*1 Å	= $(1 \pm 5 \cdot 10^{-7}) 10^{-10}$ м
*1 л. с.	= 735,49875 Вт
*1 дина	= $10^{-5}$ Н
*1 кгс	= 9,80665 Н
*1 П (пуаз)	= 1 дин·с/см <sup>2</sup> = 0,1 Па·с
*1 Ст (стокс)	= 1 см <sup>2</sup> /с = $10^{-4}$ м <sup>2</sup> /с
*1 ккал	= 4,1868 кДж
*1 ккал/ч	= 1,163 Вт

## 2. Производные электрические и магнитные единицы

Величина	Единица	Обозначение
Напряжение, электрическая разность потенциалов	вольт	В
Сопротивление	ом	Ом
Электрическая проводимость	сименс	См
Количество электричества, электрический заряд	кулон	Кл
Электрическая емкость	фарада	Ф
Электрическая плотность потока, смешение	кулон на квадратный метр	Кл/м <sup>2</sup>
Напряженность электрического поля	вольт на метр	В/м
Магнитный поток	вебер или вольт-секунда	Вб или В·с
Магнитная плотность потока, магнитная индукция	тесла	Т
Индуктивность	генри	Г
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	А/м
Электрическая кажущаяся мощность	вольт-ампер	В·А
Электрическая реактивная мощность	вар	вар

Соотношения между единицами

+1 Фр (франклин)	$= \frac{1}{3} \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$
+1 Би (био)	$= 10 \text{ А}$
+1 Ф <sub>межд</sub>	$= \frac{1}{1,00049} \text{ Ф}$
+1 В <sub>межд</sub>	$= 1,00034 \text{ В}$
+1 А <sub>межд</sub>	$= \frac{1,00034}{1,00049} \text{ А}$
+1 Ом <sub>межд</sub>	$= 1,00049 \text{ Ом}$
+1 Э (эрстед)	$= \frac{10^3}{4\pi} \text{ А/м}$
+1 Мкс (максвелл)	$= 10^{-8} \text{ Вб}$
+1 γ	$= 10^{-9} \text{ Т}$
+1 Гс (гаусс)	$= 10^{-4} \text{ Т}$
+1 Гб (гильберт)	$= 1 \text{ Э} \cdot \text{см} = \frac{10}{4\pi} \text{ А}$
+1 Г <sub>межд</sub>	$= 1,00049 \text{ Г}$

3. Производные единицы атомной физики, а также единицы с особой областью применения (\*), не входящие ни в какие комбинации с другими единицами (СИ)

Величина	Единица	Обозначение
Активность радиоактивного вещества	обратная секунда	$\text{с}^{-1}$
Поглощенная доза (излучения), эквивалентная доза (излучения)	джоуль на килограмм	$\text{Дж/кг}$
Мощность поглощенной дозы, мощность эквивалентной дозы	ватт на килограмм	$\text{Вт/кг}$
Ионная доза <sup>1)</sup>	кулон на килограмм	$\text{Кл/кг}$
Мощность ионной дозы	ампер на килограмм	$\text{А/кг}$
Молярная масса	килограмм на моль	$\text{кг/моль}$
Молярность	моль на кубический метр	$\text{моль/м}^3$
* Оптическая сила	диоптрия	дпт
* Площадь земельного участка	ар или гектар	а или га
* Масса драгоценных камней	метрический карат	карат
* Погонная масса текстиля, волокна и пряжи	текс	текс

<sup>1)</sup> Величина, определяющая дозу облучения; применяется в Германии. — Прим. перев.

*Продолжение приложения II*

## Соотношения между единицами

* 1 кюри	$= 3,7 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$
* 1 рад	$= 0,01 \text{ Дж/кг}$
* 1 бэр	$= 0,01 \text{ Дж/кг}$
* 1 Р (рентген)	$= 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$
1 дпт	$= 1 \text{ м}^{-1}$
1 а	$= 100 \text{ м}^2$
1 га	$= 100 \text{ а} = 10^4 \text{ м}^2$
1 карат	$= \frac{1}{5000} \text{ кг} = 0,2 \text{ г}$
1 текс	$= 10^{-6} \text{ кг/м} = 1 \text{ мг/м}$

## Приложение III

## Основные физические константы [94]

Величина	Обозначение	Значение и (ошибка) <sup>1)</sup>	Относительная ошибка, $\times 10^6$	Единица
Скорость света	$c$	299 792,4580(12)	0,0040	км/с
Магнитная проницаемость вакуума	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	0	В·с/А·м
Диэлектрическая проницаемость $1/\mu_0 c^2$	$\epsilon_0$	8,854 187 818(71)	0,0080	$10^{-12}$ А·с/В·м
Постоянная Ридберга	$R_\infty$	1,097 373 143(10)	0,0091	$10^7$ м <sup>-1</sup>
Постоянная тонкой структуры	$\alpha^{-1}$	137,036 04(11)	0,83	
Элементарный заряд	$e$	1,602 1829(22)	1,4	$10^{-19}$ Кл
Квант действия (постоянная) Планка	$h$	6,626 124(13)	2,0	$10^{-34}$ Дж·с
$h/2\pi$	$\hbar$	1,054 5804(21)	2,0	$10^{-34}$ Дж·с
Постоянная (число) Авогадро	$N_A$	6,022 0921(62)	1,0	$10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Атомная единица массы	а. е. м.	1,660 5525(17)	1,0	$10^{-27}$ кг
Масса покоя электрона	$m_e$	9,109 4634(99)	1,1	$10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p$	1,672 6355(17)	1,0	$10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	$m_n$	1,007 276 484(10)	0,01	а. е. м.
Отношение масс протона и электрона	$m_p/m_e$	1,674 9412(17)	1,0	$10^{-27}$ кг
мюона и электрона	$m_\mu/m_e$	1836,151 48(68)	0,37	
Удельный заряд электрона	$e/m_e$	206,768 61(48)	2,3	
		1,758 8115(24)	1,4	$10^{11}$ Кл/кг

Квант магнитного потока	$h/2e$	2,067 8426(14)	0,69	$10^{-15}$ Т·м <sup>2</sup>
Постоянная Джозефсона	$2e/h$	4,835 9680(33)	0,69	$10^{14}$ Гц/В
Постоянная (число) Фарадея $eNA$	$F$	9,648 493(13)	1,4	$10^4$ Кл/моль
Боровский радиус	$a_0$	5,291 7706(44)	0,83	$10^{-11}$ м
Классический радиус электрона	$r_e$	2,817 9378(70)	2,5	$10^{-15}$ м
Эффективное сечение (рассеяния) Томсона	$\sigma_e$	0,665 2447(33)	5,0	$10^{-28}$ м <sup>2</sup>
Комптоновская длина волны $h/mc$				
электрона	$\lambda_{ce}$	2,426 3088(40)	1,7	$10^{-12}$ м
протона	$\lambda_{cp}$	1,321 4099(23)	1,7	$10^{-15}$ м
нейтрона	$\lambda_{cn}$	1,319 5909(22)	1,7	$10^{-15}$ м
$g$ -фактор электрона $\mu_e/\mu_B$	$g_e/2$	1,001 159 6525(17)	0,0017	
Магнетон Бора	$\mu_B$	9,274 041(27)	3,0	$10^{-24}$ Дж/Т
Магнитный момент электрона	$\mu_e$	9,284 796(28)	3,0	$10^{-24}$ Дж/Т
Ядерный магнетон $e\hbar/2m_p$	$\mu_N$	5,050 804(15)	3,0	$10^{-27}$ Дж/Т
Магнитный момент протона	$\mu_p$	1,410 6115(42)	3,0	$10^{-26}$ Дж/Т
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	$V_m$	22,413 83(70)	31,0	$10^{-3}$ м <sup>3</sup> /моль
Универсальная газовая постоянная	$R$	8,314 41(26)	31,0	Дж·моль <sup>-1</sup> ·К <sup>-1</sup>
		8,205 69(26)	31,0	$10^{-5}$ м <sup>3</sup> ·атм/моль·К
Постоянная Больцмана $R/NA$	$k$	1,380 652(43)	31,0	$10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Стефана — Больцмана $\pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	$\sigma$	5,670 28(71)	125,0	$10^{-8}$ Вт·м <sup>-2</sup> ·К <sup>-4</sup>
Первая константа излучения $2\pi\hbar c^2$	$c_1$	3,741 8024(75)	2,0	$10^{-16}$ Вт·м <sup>2</sup>
Вторая константа излучения $\hbar c/k$	$c_2$	1,438 786(45)	31,0	$10^{-2}$ м·К
Гравитационная постоянная	$\gamma$	6,6720(41)	615,0	$10^{-11}$ м <sup>3</sup> ·с <sup>-2</sup> ·кг <sup>-1</sup>

<sup>1)</sup> Стандартное отклонение (средняя квадратичная ошибка), о котором шла речь в последних разделах (указывается в скобках).



# Приложение IV

## Энергетические соотношения атомной физики

Величина		Значение и (ошибка)		Относи- тельная ошибка, $\times 10^6$	Единица
Массы					
Атомная	единица	$uc^2$	931,4980(13)	1,4	МэВ
массы					
Электрон		$m_e c^2$	511,001 41(69)	1,4	кэВ
Мюон		$m_\mu c^2$	105,659 05(24)	2,2	МэВ
Протон		$m_p c^2$	938,2760(13)	1,4	МэВ
Нейтрон		$m_n c^2$	939,5694(13)	1,4	МэВ
1 электронвольт			1,602 1829(22)	1,4	$10^{-19}$ Дж
		1 эВ/ $h$	2,417 9790(17)	0,69	$10^{14}$ Гц
		1 эВ/ $hc$	8,065 5098(55)	0,69	$10^5$ м $^{-1}$
		1 эВ/ $k$	1,160 454(36)	31,0	$10^4$ К
Коэффициент перехода		$hc$	1,239 847 23(85)	0,69	$10^{-6}$ эВ·м
между энергией и дли- ной волны			197,327 82(14)	0,69	2л МэВ·м $^3$
Постоянная Ридберга		$R_\infty hc$	2,179 8901(14)	2,0	$10^{-18}$ Дж
			13,605 7505(93)	0,69	эВ
		$R_\infty c$	3,289 841 919(33)	0,0099	$10^{15}$ Гц
		$R_\infty hc/k$	1,578 885(49)	31,0	$10^5$ К

## Литература

1. *Euler Leonhard*, Algebra, 1766.
2. *Fleischmann R.*, Die Struktur des physikalischen Begriffssystems, Zs. Phys., **129**, 377 (1951).
3. *Fleischmann R.*, Einführung in die Physik, Weinheim, 1973.
4. Bundesgesetzblatt, 1969, Teil I, Nr. 55, S. 709.
5. Bundesgesetzblatt, 1970, Teil I, Nr. 62, S. 981.
6. *Westphal W. H.*, Die Grundlagen des Physikalischen Begriffssystems, Braunschweig, 1965.
7. *Draht P.*, Phys. Blätter, **31**, 293 (1975).
8. *Terrien J.*, Metrologia, **8**, 99 (1972).
9. *Väisälä Y., Oterma L.*, Metrologia, **3**, 37 (1967).
10. *Michelson A. A., Morley E. W.*, Amer. J. Sci. (3), **34**, 427 (1887); (3), **38**, 181 (1889).
11. *Hellwege K.-H.*, Einführung in die Physik der Atome, Heidelberger Taschenbücher, Nr. 2, Springer-Verlag, 3. Auflage, 1970.
12. *Kohlrausch F. W.*, Praktische Physik I, Stuttgart, 1968.
13. *Rowley W. R. C., Hamon J.*, Revue d'Optique, **42**, 519 (1963).
14. *Schulze R.*, в кн.: Handbuch der Physik, herausgegeben von S. Flügge, Bd. 29, Springer-Verlag, Heidelberg, 1967.
15. *Kinder W.*, Zeiss-Werkzeitschrift, Nr. **43**, S. 3—11 (1962).
16. *Ciddor P. E., Bruce C. F.*, Metrologia, **3**, No. 4 (1967).
17. *Mollwo E., Kaule W.*, Maser und Laser, BI-Taschenbuch, Mannheim, 1966.
18. *Feld M. S., Letokhov V. S.*, Scientific American, **229**, 69 (1973).
19. *Gilliland K. E., Cook H. D., Mielenz K. D., Stephens R. B.*, Metrologia, **2**, 95 (1966).
20. Jahresbericht der Phys.-Techn. Bundesanstalt, 1973.
21. Phys.-Techn. Bundesanstalt Mitteilungen, **85**, Heft 1 (1975).
22. *Helmcke J., Bayer-Helms F.*, Metrologia, **10**, 69 (1974).
23. *Bay Z., Luther G. G., White J. A.*, Phys. Rev. Letters, **29**, 189 (1972).
24. *Evenson K. M., Wells J. S. et al.*, Phys. Rev. Letters, **29**, 1346 (1972).
25. *Taylor B. N., Parker W. H., Lanngenberg D. N.*, Rev. Mod. Phys., **41**, 375 (1969).
26. *Bergstrand E.*, Handbuch der Physik, herausgegeben von S. Flügge, Bd. 4, 1956.
27. *Evenson K. M.*, Bull. Amer. Phys. Soc., **34**, 10 (1975).
28. *Terrien J.*, Metrologia, **10**, 9 (1974).
29. *Struwe O.*, Astronomie, Berlin, 1963.
30. *Jung K.*, в кн.: Handbuch der Physik, herausgegeben von S. Flügge, Bd. 47, Heidelberg, 1956.
31. *Kovalevsky J.*, Metrologia, **1**, 169 (1965).
32. *Stille U.*, Messen und Rechnen in der Physik, Braunschweig, 1961.
33. *Beehler R. E., Mockler K. C., Richardson J. M.*, Metrologia, **1**, 114 (1965).
34. *Kopfermann H.*, Kernmomente, 2. Aufl., Frankfurt, 1956.
35. *Ramsey N.*, Molecular Beams, Oxford, 1963.
36. *Newton I.*, Principia, Berkeley, California, 1934.
37. *Bendel W. L.*, Naval Research Laboratory, Memorandum Report 3213, January 1976.
38. *Deslattes R. D., Henins A. et al.*, Phys. Rev. Letters, **33**, 463 (1974).
39. *Mattauch J.*, Masseinheiten für Atomgewichte und Nuklidmassen, Zs. Naturforsch., **13a**, 572 (1958).
40. *Mattauch J. H. E., Thiele W., Wapstra A. H.*, Nucl. Phys., **67**, 1 (1965).

41. *Froelich M., Melchert F.*, *Metrologia*, **10**, 79 (1974).
42. *Maxwell J. C.*, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. II, Dover Publ. Co., 1954.
43. *Jackson J. D.*, *Classical Electrodynamics*, New York, 1962. [Имеется перевод: Джексон Дж., Классическая электродинамика.— М.: Мир, 1965.]
44. *Becker R.*, *Theorie der Elektrizität*, Band 1, 20. Aufl., Stuttgart, 1972. [Имеется перевод: Бекер Р. Электронная теория.— М.: ОНТИ, 1936.]
45. *Driscoll R. L., Cutkosky R. D.* *Journ. Research Natl. Bureau of Standards*, **60**, 297 (1958).
46. *Bender D., Schlesok W.*, *Metrologia*, **10**, 1 (1974).
47. *Lord Rayleigh, Mrs H. Sidgwick*, *Phil. Trans.*, **A 175**, 411 (1885).
48. *Snow Ch.*, *Journ. Research Natl. Bureau of Standards*, **22**, 239 (1939).
49. *Kahle K.*, *Zs. Instrumentenkunde*, 1897, S. 97.
50. *Driscoll R. L.*, *Journ. Research Natl. Bureau of Standards*, **60**, 287 (1958).
51. *Josephson B. D.*, *Physics Letters*, **1**, 251 (1962).
52. *Buckel W.*, *Supraleitung*, Weinheim, 1972. [Имеется перевод: Буккель В. Сверхпроводимость.— М.: Мир, 1975.]
53. *Kittel Ch.*, *Einführung in die Festkörperphysik*, München, 1968. [Имеется перевод: Куммель Ч. Введение в физику твердого тела.— М.: Физматгиз, 1970.]
54. *Shapiro S.*, *Phys. Rev. Letters*, **11**, 80 (1963).
55. *Feynman R., Leighton R. et al.*, *Feynman Lectures on Physics*, vol. 3, New York, 1965. [Имеется перевод: Фейнман Р., Лейтон Р. и др. Фейнмановские лекции по физике.— М.: Мир, 1967.]
56. *Cohen E. R., Taylor B. N.*, *Journ. Phys. Chem. Ref. Data*, **2**, 663 (1973).
57. *Field, Finnegan, Toofs*, *Metrologia*, **9**, 155 (1973).
58. Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах.— М.: Наука, 1974.
59. *Gerland E., Traumüller F.*, *Geschichte der physikalischen Experimentierkunst*, Leipzig, 1899, Hildesheim, 1965.
60. *Boer J. de*, *Metrologia*, **4**, 158 (1965).
61. *Pohl R. W.*, *Einführung in die Physik*, Band 1, 17 Aufl., Springer Verlag, Heidelberg, 1969.
62. *Phys.-Techn. Bundesanstalt Mitteilungen*, **85**, Heft 1 (1975).
63. *Becker R.*, *Theorie der Wärme*, Heidelberg, 1966.
64. *Giauque W. F.*, *Nature*, **143**, 623 (1939).
65. *Moser H., Otto J., Thomas W.*, *Zs. Phys.*, **147**, 59 (1957).
66. *Moser H.*, *Metrologia*, **2**, 68 (1965).
67. *Plumb H., Cataland G.*, *Metrologia*, **2**, 127 (1966).
68. *Landolt-Börnstein*. Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik, Technik, II. Band, 2. Teil.
69. *Kohlrausch F. W.*, *Praktische Physik*, Band III, Stuttgart, 1968.
70. *McCarty R. D.*, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **2**, 923 (1973).
71. *Cetas T. C.*, *Metrologia*, **12**, 27 (1976).
72. *Kunz H.*, *Metrologia*, **5**, 88 (1969).
73. *Comité International des Poids et Mesures*, *Metrologia* **5**, 35 (1969).
74. *Herzberg G.* *Molecular Spectra and Molecular Structure*, vol. 1, 1950. [Имеется перевод: Герцберг Г. Электронные спектры и строение многоатомных молекул.— М.: Мир, 1969.]
75. *Lee R. D.*, *Metrologia*, **2**, 150 (1966).
76. *Jones T. P., Tapping J.*, *Metrologia*, **8**, 4 (1972).
77. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **64 A**, 1 (1960).
78. *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **68 A**, 547 (1964).
79. *Wyszecki G.*, *Metrologia*, **2**, 111 (1966).
80. *Bergmann-Schäfer*. *Lehrbuch der Experimentalphysik*, Band III, 6. Aufl., Berlin, 1974.
81. DIN Blätter 5031,

82. Blevin W. R., *Metrologia*, **8**, 146 (1972).
83. Williamson J. H., *Canad. Journ. of Physics*, **46**, 1895 (1968).
84. Barker D. R., Diana L. M., *Am. J. Physics*, **42**, 224 (1944).
85. Jahnke-Emde-Lösch, *Tafeln höherer Funktionen*, 7. Aufl., Stuttgart, 1966.
86. Waerden B. L. van der, *Mathematische Statistik*, Heidelberg, 1957.
87. Harter H. L., *Biometrika*, **51**, 231 (1964).
88. *Handbook of Tables for Probability and Statistics*, 2nd ed., Cleveland, 1968.
89. Bevington Ph. R., *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, New York, 1969.
90. Fisz M., *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, Berlin, 1970.
91. Taylor B. N., Parker W. H., Landenberg D. N., *Revs. mod. Phys.*, **41**, 375 (1969).
92. Southwell W. H., *J. Comput. Phys.* **4**, 465 (1969).
93. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.— М.: Наука, 1969.
94. Bendel W. A., 1975 Least-Squares Adjustment of Values of the Fundamental Constants, Naval Research Laboratory Memorandum Report 3213, January, 1976.

## Указатель

- Абелева группа 17  
абсолютная температура 107, 110  
абсолютные практические единицы 81  
акустический термометр 119  
*Амонтонс* 102, 103, 113  
*Ампер* 85  
ампер 20, 82, 85, 89, 92  
аномалистический год 48  
ар 22  
ассоциативность 17  
атомная единица массы 22
- Базисная величина 17  
базисные единицы 20  
бар 22  
*Бардин* 96  
*Бенца* 28, 29, 37  
*Бессель* 25  
биноминальное распределение 181  
*Бойль* 102
- Ватт 21  
вебер 21  
вектор Пойнтинга 137  
вероятность 168  
вес 68  
взвешенное среднее 160  
*Вильямсон* 165  
вириальные коэффициенты 115  
виоль 143  
вольт 21  
вольт-ампер 22  
вольт-секунда 22  
время 20  
вторичные точки отсчета 126  
второе начало термодинамики 109  
второй закон Ньютона 64  
выборка 172  
*Вяйселе* 29
- Газовый термометр 116—118  
газотермометрическая температура 115  
*Галилей* 102  
*Гаусс* 79, 156  
гауссова система единиц 81, 83  
*Гей-Люссак* 105  
*Гельмерт* 175  
генри 21, 98  
*Герон Александрийский* 102  
герц 21  
гетерохромная фотометрия 141  
*Гиббс* 115  
гистограмма 153  
гравитационная масса 69  
градус Цельсия 22, 101
- Давление 21  
двухлучевой делитель 133  
*Деламбр* 24  
десятичная свеча 143  
*Джиллэнд* 41  
*Джозефсон* 93  
дожуйль 21  
дисперсия 170, 182  
длина 20  
доверительный уровень 189  
*Дрисколл* 89, 93
- Единичный элемент 17  
емкость 99
- Закон Ампера 78  
— Био — Савара 80  
— Бойля — Мариотта 102  
— Гей-Люссака 107  
— Кулона 78  
— Ламберта 138  
— распространения ошибок Гаусса 157  
— Эрстеда 85
- заряд 21  
звездные сутки 46
- Ивенсон* 42  
идеальный газ 106  
избыток массы 75  
именованное число 14  
инвариантность физической величины 11  
индуктивность 21, 84, 98  
индукция электрического поля 78  
инертная масса 69  
интерферометр Майкельсона 26  
— Фабри — Перо 28, 37  
истинный солнечный день 45
- Кандела* 20, 137, 143, 146  
*Карно* 107  
кельвин 20, 101  
*Клаузиус* 109, 114  
когерентные единицы 14  
— производные единицы системы СИ 21  
количество вещества 20  
коммутативность 17  
конечная производящая система 17  
константа Кюри 122  
концевая мера 26  
коэффициент взаимной индукции 98  
— давления 106  
— объемного расширения 105  
— полезного действия 108  
— самоиндукции 98
- Крениг* 114  
кривая выравнивания 163  
кубик Люммера — Бродхуна 151  
*Кук* 41  
кулон 21  
*Купер* 96  
*Кутовский* 89
- Лазер 38  
*Лаплас* 86  
литр 22  
лэмбовский провал 40, 42  
люкс 21, 144  
люмен 21, 144
- Магнитная восприимчивость 99  
— проницаемость 78  
магнитный заряд 79  
— момент атома 57  
— поток 21  
— термометр 122
- Майкельсон* 26  
*Максвелл* 86, 114  
*Марцотт* 102  
масса 13, 20, 64  
— атома 73

- масс-спектрограф 76  
 математическое ожидание 171, 175, 182  
 машина Филипса 111  
 Международная практическая температур-  
 ная шкала 124  
 Международная система единиц (СИ) 20  
 мезопическое соответствие 142  
*Мельхерт* 82  
 метод мерцаний 141  
   — минимума величины  $\chi^2$  186  
   — наименьших квадратов 165  
   — резонансного атомного пучка 56  
 метр 20  
 метр-компаратор Кестера 35  
 механическое натяжение 21  
*Мешэн* 24  
*Милени* 41  
 моль 20, 22, 71  
 молярная величина 72  
   — масса 71, 73  
   — проницаемость 122  
   — теплоемкость 111  
   — теплота парообразования 121  
 молярное намагничение 122  
 молярный объем 121  
*Морли* 26  
 мостик Кемпбелла 100  
   — Уитстона 158  
 мощность 21  
 мультипликативная связь 17  
  
 Напряженность магнитного поля 79  
   — электрического поля 78  
 неравенство Чебышева 180  
 нормальное распределение 169  
 нормальное ускорение силы тяжести 66  
 нормальный кадмиевый элемент 82  
*Ньюком* 49  
*Ньютон* 69  
 Ньютон 13, 21, 65  
  
 Обратный тип величин 17  
 ом 21, 82  
 опорная точка 124  
 освещенность 121  
 относительная степень отклонения 155  
   — — точности 155  
  
 Паскаль 21  
 первое начало термодинамики 101  
*Перо* 28, 29, 37  
 пирометр 123  
*Пирсон* 175  
 плоский угол 16  
 плотность вероятности 168  
   — магнитного потока 21  
   — потока энергии излучения 138  
 подъемная сила 68  
 поле тяжести 68  
 поправка Бугера 67  
 постоянная Больцмана 115  
 поток излучения 138, 145  
 правило Дюлонга — Пти 71  
 преломляющая способность 21  
 приставки десятичного деления единиц 11  
 производная величина 17  
 процесс Стирлинга 111  
 прямая выравнивания 161, 180  
   — регрессии 163  
  
 Работа 21  
 радиан 16, 20  
 радиоактивный распад 163  
 размерность 12  
 регрессионный анализ 163  
  
 распределение Максвелла 177  
   — Пуассона 183  
*Рэлей* 89  
  
 Световая экспозиция 145  
   — энергия 145  
 световой поток 21, 145  
 свеча Гейфнера 143  
 секунда 20, 53  
 сидерический год 47  
 сила 13, 21, 64  
   — излучения 138  
   — Лоренца 85  
   — света 20, 145  
   — электрического тока 20  
 система СГС 78  
 скорость 13  
   — звука 119  
 скотопическое соответствие 142  
*Снеллиус* 22  
 сопротивление 100  
 спектральный фотометрический эквивалент  
   излучения 143  
 сравнение яркостей 140  
 среднее арифметическое 155, 159, 172  
 средний разброс 155  
 стандартная криптоновая лампа 32  
 стандартное отклонение 155, 159, 178  
 стандартный наблюдатель 142  
 стерадиан 16, 20  
*Стивенс* 41  
  
 Телесный угол 16  
 температура 20  
 теорема Карно 109  
 теория ошибок 153  
 термодинамическая температура 107, 114  
 термометр с насыщенным паром 121  
   — сопротивления 127  
 термоскоп 102  
 техническая единица массы 66  
   — система 65  
*Томсон* 109, 112, 113  
 тонна 22  
 точка замерзания воды 114  
 тройная точка воды 113  
 тропический год 47  
*Тутс* 98  
  
 Угловая скорость 67  
 удельная величина 72  
 уравнение времени 45  
   — Клаузиуса — Клапейрона 121  
 уравнения Максвелла 80  
   — для физических величин 14  
 ускорение 13  
  
*Фабри* 28, 29, 37  
 фарада 21  
*Фарадей* 80  
 физическая величина 10  
*Филд* 98  
*Филон Византийский* 102  
*Финнегат* 98  
*Флейшманн* 17  
 формула Ньюкома 51  
 фотометр 150  
 фотометрическая освещенность 145  
   — светимость 144, 145  
   — сила света 141  
   — яркость 141, 144, 145  
 фотометрическое соответствие 142  
 фотометрия 137  
*Фрелих* 82  
 функция распределения дисперсий 174

функция распределения суммы  
квадратов 175

*Цельсий* 104  
центробежная сила 67  
цикл Карно 108

Частота 21  
черный излучатель 131, 143, 146  
число Авогадро (Лошмидта) 22  
числовое значение 10

*Шалиро* 96  
шар Ульбрихта 149  
*Шриффер* 96  
*Штремер* 104

*Эйлер* 7  
электрическая емкость 21, 84  
— мощность 84  
— проводимость 21  
электрическое напряжение 21  
— сопротивление 21, 84  
электронвольт 22  
энергетическая освещенность 139, 145  
— светимость 139, 145  
— сила света 141, 145  
— яркость 130, 145  
энергия 21  
излучения 145  
*Эрстед* 80  
эталон кандеры 146, 147  
— метра 24  
*Этвеш* 70  
эфемеридная секунда 53  
эфемеридное время 51  
эффект Джозефсона 93

# Оглавление

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие. . . . .	6
1. Введение . . . . .	7
2. Физическая величина, ее числовое значение и размерность, уравнения для физических величин . . .	10
2.1. Величина и ее числовое значение . . . . .	10
2.2. Род величины и ее размерность . . . . .	12
2.3. Уравнения для физических величин . . . . .	14
2.4. Углы . . . . .	16
3. Система базисных величин . . . . .	17
4. Единицы системы СИ (Международной системы единиц) . . . . .	20
5. Реализация единицы длины . . . . .	23
5.1. Исторический обзор . . . . .	23
5.2. Интерферометрия . . . . .	26
5.3. Стандартная криптоновая лампа . . . . .	32
5.4. Практическое измерение метра . . . . .	35
5.4.1. Метр-компаратор Кестера . . . . .	35
5.4.2. Метр-компаратор в Сиднее . . . . .	37
5.4.3. Двойной интерферометр Фабри — Перо . . . . .	37
5.5. Применение лазеров как стандартов длины волны . . . . .	38
5.6. Перспективы развития . . . . .	42
6. Реализация единицы времени . . . . .	43
6.1. Старые определения . . . . .	44
6.2. Астрономическое определение единицы времени — эфемеридная секунда . . . . .	48
6.3. Определение и реализация единицы времени средствами атомной физики . . . . .	53
7. Реализация единицы массы . . . . .	64
7.1. Сила и масса . . . . .	64
7.2. Вес; гравитационная и инертная массы . . . . .	68
7.3. Количество вещества . . . . .	71
7.4. Система атомных масс . . . . .	75
8. Реализация единицы силы электрического тока . . . . .	78
8.1. Система СГС в теории электромагнетизма . . . . .	78
8.2. Международные единицы напряжения, силы тока и сопротивления . . . . .	81
8.3. Единицы системы СИ в теории электромагнетизма . . . . .	85



8.4. Реализация единицы 1 А с помощью силы, действующей на катушку с током [45, 46], «взвешивание» токов по Рэлею [47]	89
8.5. Представление единицы 1 А с помощью момента силы, действующего на катушку с током . . . . .	92
8.6. Джозефсоновский контакт как стандарт напряжения . . . . .	93
8.7. Реализация производных электрических единиц . . . . .	98
 9. Реализация температурной шкалы . . . . .	 101
9.1. Эволюция понятия температуры на раннем этапе [59] . . . . .	102
9.2. Определение температуры по Амонтону . . . . .	102
9.3. Температурные шкалы Фаренгейта, Реомюра и Цельсия [60]	103
9.4. Температурная шкала Цельсия для идеального газа . . . . .	105
9.5. Термодинамическое определение температуры . . . . .	107
9.6. Статистическое определение температуры [60] . . . . .	114
9.7. Газотермометрические измерения . . . . .	115
9.8. Другие термометры для измерения термодинамической температуры . . . . .	119
9.9. Международная практическая температурная шкала . . . . .	124
9.10. Нормальные приборы МПТШ-68 . . . . .	127
9.11. Реализация МПТШ выше точки золота . . . . .	131
9.12. МПТШ ниже 13,81 К . . . . .	135
9.13. Новые данные . . . . .	135
 10. Реализация единицы силы света . . . . .	 137
10.1. Энергетические величины . . . . .	137
10.2. Фотометрические величины [79, 80] . . . . .	140
10.3. Реализация эталона силы света . . . . .	146
10.4. Вторичные эталоны . . . . .	147
10.5. Фотометр . . . . .	150
 Приложение I . . . . .	 152
1. Введение . . . . .	152
2. Элементарное исчисление ошибок . . . . .	153
3. Некоторые теоретические основы исчисления ошибок . . . . .	167
4. Статистическое испытание измерений. Тесты . . . . .	180
 Приложение II . . . . .	 193
Таблицы производных единиц и соотношений между единицами . . . . .	193
 Приложение III . . . . .	 198
Основные физические константы [94] . . . . .	198
 Приложение IV . . . . .	 200
Энергетические соотношения атомной физики . . . . .	200
 Литература . . . . .	 201
 Указатель . . . . .	 204

